

Übersicht

- 1 Monte-Carlo Methoden zur Integration (Erwartungswerte): Bewertung der Anlagen; Versicherungen mit stochastischem Zins
 - Was ist Monte Carlo?
 - Versicherungen mit stochastischem Zins
 - Bepreisung als numerische Integration
 - Von klassischer numerischer Integration zu Monte-Carlo Methoden
 - Konvergenz
 - Beispiel: Trapezregel vs. Monte Carlo
 - Konfidenzintervall für Monte Carlo Schätzer
 - Pfadsimulation
 - Brownsche Brücke: Adaptive Erzeugung der Pfade der Brownschen Bewegung
 - Beispiel: Asiatische Option im Black-Scholes Modell
- 2 Simulation von Verteilungen
- 3 Monte-Carlo Methoden zur Simulation von Verteilungen: Risikoanalyse von Sterblichkeitsmodellen

Netto-Einmalprämien mit stochastischem Zins

Beispiel (Leibrente mit stochastischem Zins)

Lebenslänglichen Leibrente an x -jährige Person. Zins nicht deterministisch, sondern durch stoch. Zinsintensitätsprozess $(r_t)_t$ (Spot-Rate) und stoch. Diskontierungsfaktor $v(n) = \exp(-\int_0^n r_\tau d\tau)$ (ZV!) gegeben.

Der Barwert (als Zufallsvariable) dieser Leibrente beträgt:

$$Y_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{T_x \geq n} v(n) c_n$$

Die Netto-Einmalprämie ist der Erwartungswert (bezüglich der zukünftigen Lebensdauer T_x und der Zinsentwicklung!):

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}^{T_x \times r_t} [Y_x] = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x \mathbb{E}[v(n)] c_n$$

Annahme: Zins und Sterblichkeit unabhängig

Berechnung: (1) Zinsmodell (Zinskurve!), z.B. durch SDE, geeignet kalibriert und (2) numerische Methode zur Bestimmung von $\mathbb{E}[v(n)]$. Letzteres ist Ziel dieses Vortrags.

Das Bepreisungsproblem in der Finanzmathematik

Theorem

Auf einem Finanzmarkt (gegeben durch einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum

$$\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \right)$$

sei ein Wertpapier (Aktie, Anleihe, Fond) mit Kurs X_t zur Zeit t und ein Referenzwertpapier B_t gegeben. Dann ist der Preis des Zahlungsstromes zum Zeitpunkt $s \leq t$ gegeben durch

$$V_s(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{X}_t | \mathcal{F}_s \right],$$

wobei \mathbb{Q} ein zu \mathbb{P} äquivalentes Maß ist, unter dem der diskontierte Wertpapierkurs $\tilde{X}_t = X_t/B_t$ ein Martingal ist (d.h. insbesondere $\mathbb{E}[\tilde{X}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{X}_s$), sonst ist risikoloser Gewinn möglich).

Klassische numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten w_k .

Benötigte Zahl an Stützstellen: $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung: $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$ (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit s !

- Idee: Einheitsintervall $[0, 1]^s$ (bzw. Integrationsbereich A) wird von Stützstellen gut ausgefüllt

Klassische numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten w_k .

Benötigte Zahl an Stützstellen: $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung: $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$ (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit s !

- Idee: Einheitsintervall $[0, 1]^s$ (bzw. Integrationsbereich A) wird von Stützstellen gut ausgefüllt

Klassische numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten w_k .

Benötigte Zahl an Stützstellen: $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung: $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$ (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit s !

- Idee: Einheitsintervall $[0, 1]^s$ (bzw. Integrationsbereich A) wird von Stützstellen gut ausgefüllt

Monte Carlo Integration

Idee: Fülle das Integrationsintervall möglichst gleichmäßig mit (zufällig gewählten) Punkten aus.

Theorem (Monte-Carlo Schätzer des Integrals)

Sei $f(x) : A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, eine quadratisch integrierbare Funktion (d.h. mit beschränkter Varianz $\sigma(f) = \int_A (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx < \infty$). Dann kann das Integral von f numerisch approximiert werden durch N iid. gleichverteilte Punkte $a_n \in A$:

$$\mathbb{E}_A[f] = \int_A f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n), a_n \stackrel{iid.}{\sim} U(A) \quad (1)$$

Praktisch alle in der Finanz- und Versicherungsmathematik auftretenden Funktionen sind quadratisch integrierbar!

Bemerkung

Diese Aussage gilt auch, wenn A nicht endlich-dimensional ist, also einen gesamten Pfad – etwa den gesamten Zinsverlauf oder den Verlauf eines Aktienkurses – darstellt. In diesem Fall simuliert man einfach N einzelne Pfade und mittelt über diese Pfade.

Im Black-Scholes Modell ist der Aktienkurs z.B. durch die geometrische Brownsche Bewegung gegeben, deren logarithmische Zuwächse normalverteilt sind.

Konvergenz (Zentraler Grenzwertsatz)

Theorem (Mittlerer Fehler zum exakten Wert)

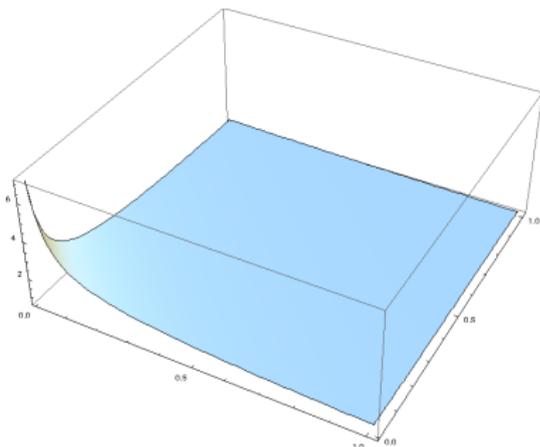
Für eine quadratisch integrierbare Funktion f beträgt der quadratische Fehler zum exakten Wert bei Monte Carlo mit N Punkten $(a_n)_n$ im Mittel

$$\mathbb{E}_{A^s} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - \mathbb{E}[f] \right)^2 \right] = \dots = \frac{\sigma^2(f)}{N}$$

D.h. um den mittleren Fehler zu halbieren, benötigt man – unabhängig von der Dimension s – etwa viermal so viele Punkte.

Beispiel

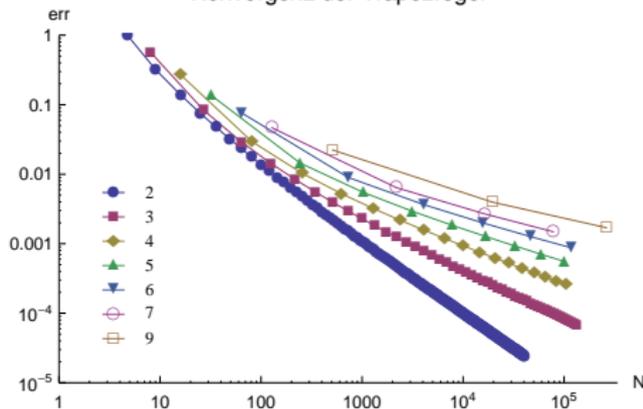
- Funktion: $f(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{\sqrt{x_1 + \dots + x_s}}$
- gesucht: $\int_{[0.01, 1.01]^s} f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \cdots dx_s$



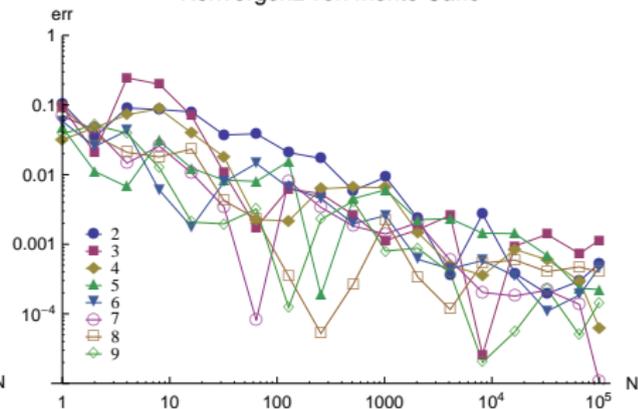
s	Integral
1	1.80998
2	1.08465
3	0.851676
4	0.725979
5	0.64387
6	0.584695
7	0.539391
8	0.503247
9	0.473533

In $s = 20$ Dimensionen hat das Integrationsintervall bereits $2^{20} = 1048576$ Ecken!

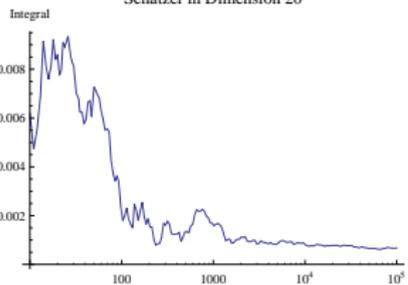
Konvergenz der Trapezregel



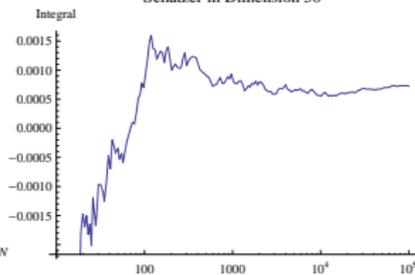
Konvergenz von Monte Carlo



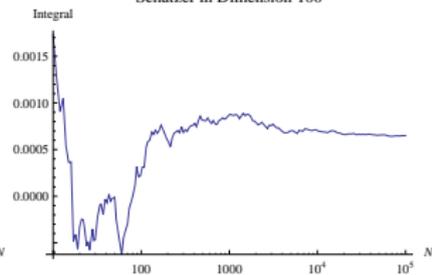
Schätzer in Dimension 20



Schätzer in Dimension 50



Schätzer in Dimension 100



Konfidenzintervall

Theorem (Konfidenzintervall)

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes gilt asymptotisch für das Konfidenzintervall:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{c_1 \sigma(f)}{\sqrt{N}} \leq \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - \mathbb{E}[f] \right) \leq \frac{c_2 \sigma(f)}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_1}^{c_2} -t^2/2 dt$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$.

D.h. der Schätzer ist tatsächlich normalverteilt um den exakten Wert, Länge des Konfidenzintervalls nimmt mit $1/\sqrt{N}$ ab!

Pfadsimulation von Prozessen mit Markov-Eigenschaft

Markov-Eigenschaft: $X_t - X_s \sim F_s(X_s), \quad s < t, \quad \text{oder } X_t \sim F_s(X_s)$

Inkrement nur von Wert zu s abhängig, nicht von Vergangenheit

- Brownsche Bewegung $F_s \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Lévy-Prozesse (unendl. teilbare Verteilungen), etc.

Algorithmus (Simulation auf äquidistantem Gitter)

- Fixiere ein Schrittweite Δt
- Beginne bei X_0 (bekannt)
- Erzeuge jeweils bedingt auf $X_{n\Delta t}$ ein Sample ΔX des Inkrements nach $F_{n\Delta t}(X_{n\Delta t})$
- Setze $X_{(n+1)\Delta t} = X_{n\Delta t} + \Delta X$.
- Führe die letzten beiden Schritte sooft durch, bis gewünschter Zeitpunkt erreicht.

Jeder dieser Pfade stellt ein Sample des stochastischen Prozesses dar.

Pfadsimulation von Prozessen mit Markov-Eigenschaft

Markov-Eigenschaft: $X_t - X_s \sim F_s(X_s), \quad s < t, \quad \text{oder } X_t \sim F_s(X_s)$

Inkrement nur von Wert zu s abhängig, nicht von Vergangenheit

- Brownsche Bewegung $F_s \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Lévy-Prozesse (unendl. teilbare Verteilungen), etc.

Algorithmus (Simulation auf äquidistantem Gitter)

- Fixiere ein Schrittweite Δt
- Beginne bei X_0 (bekannt)
- Erzeuge jeweils bedingt auf $X_{n\Delta t}$ ein Sample ΔX des Inkrements nach $F_{n\Delta t}(X_{n\Delta t})$
- Setze $X_{(n+1)\Delta t} = X_{n\Delta t} + \Delta X$.
- Führe die letzten beiden Schritte sooft durch, bis gewünschter Zeitpunkt erreicht.

Jeder dieser Pfade stellt ein Sample des stochastischen Prozesses dar.

Brownsche Brücke für Brownsche Bewegung

Erzeugung von Pfaden der Brownschen Bewegung auch adaptiv möglich (d.h. ohne vorher eine fixe Schrittweite Δt wählen zu müssen!):

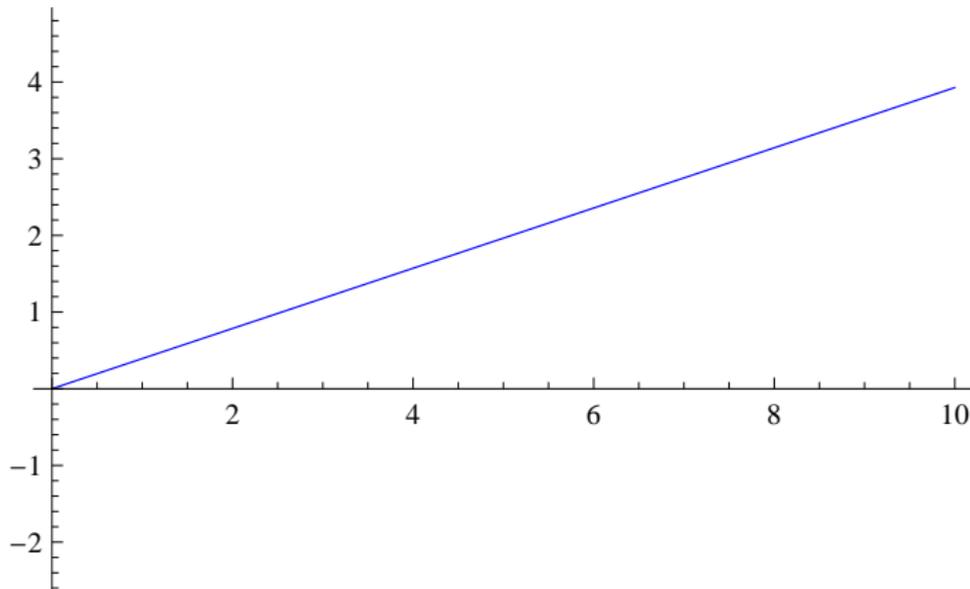
Satz

Sei (W_t) eine Brownsche Bewegung. Die Verteilung von W_t , gegeben W_s und W_u mit $u < s < t$, ist

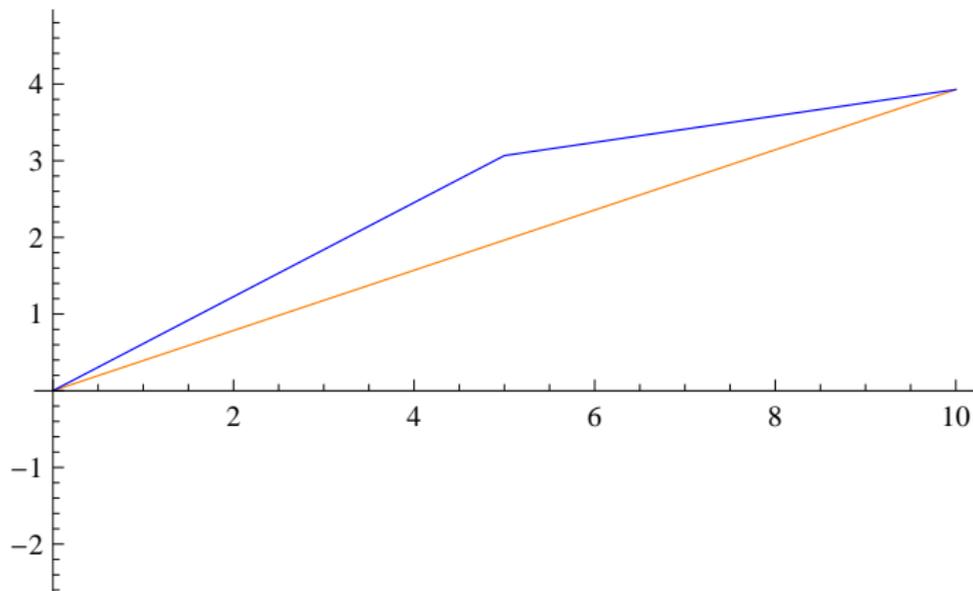
$$W_t | (W_s = x_s, W_u = x_u) \sim \mathcal{N} \left(\frac{(u-t)x_s + (t-s)x_u}{u-s}, \frac{(u-t)(t-s)}{u-s} \right)$$

- adaptive Erzeugung des Pfades: Simuliere Endwert, dann halbiere jeweils Intervall, bis gewünschte Genauigkeit erreicht!
- Für BB sehr effizient (selbe bedingte Verteilung!), für andere Prozesse prinzipiell möglich, aber andere Verteilungen.

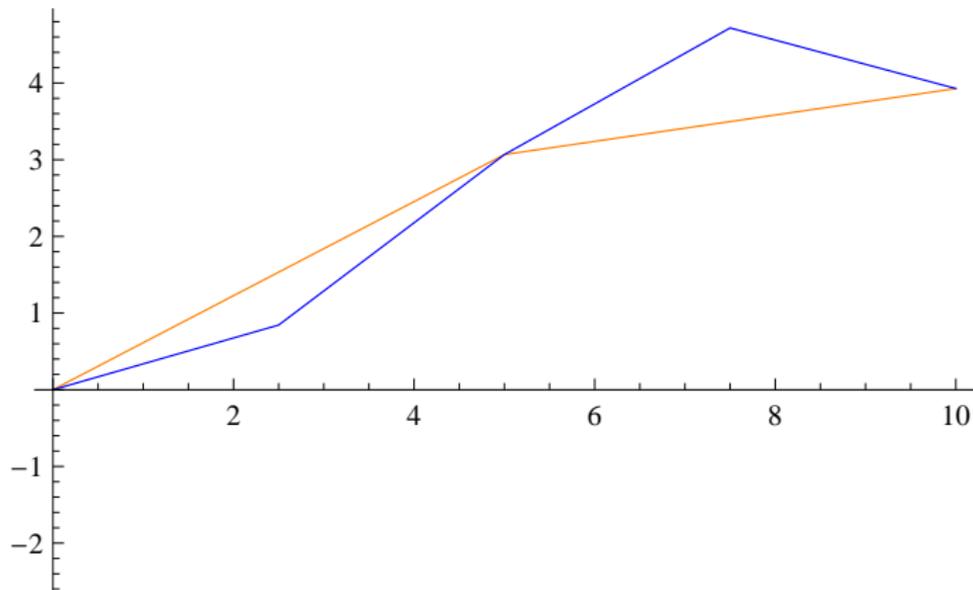
Die Brownsche Brücke



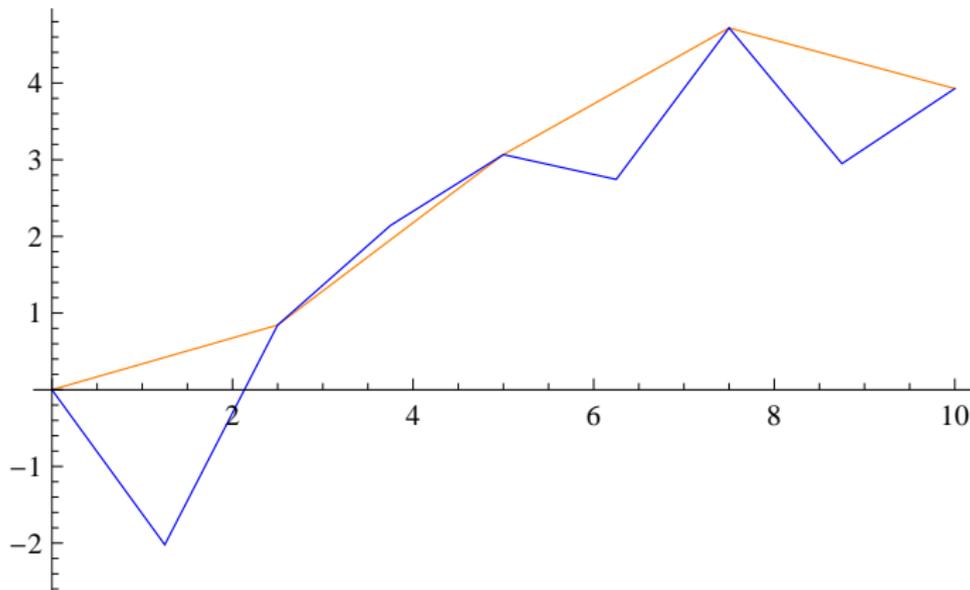
Die Brownsche Brücke



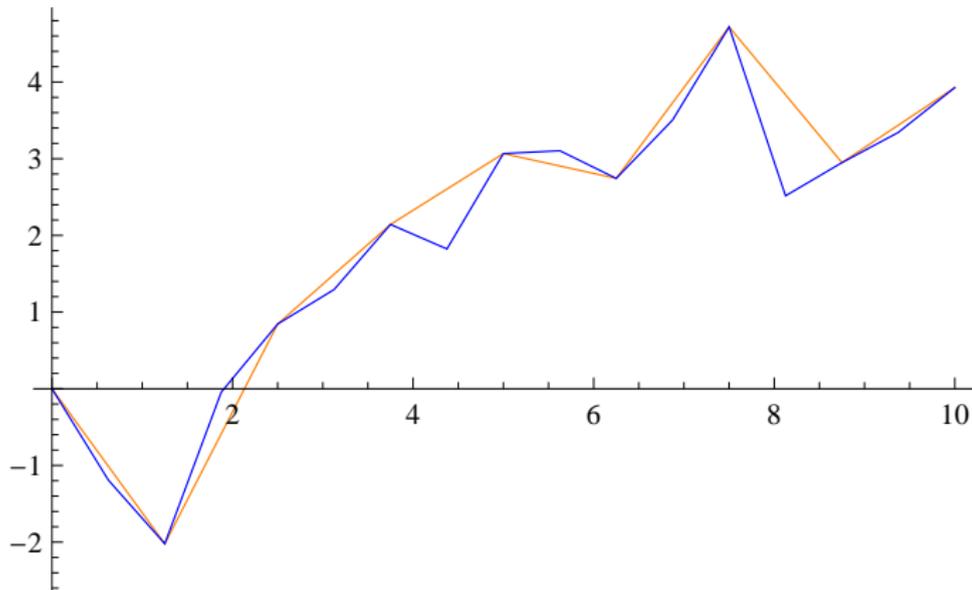
Die Brownsche Brücke



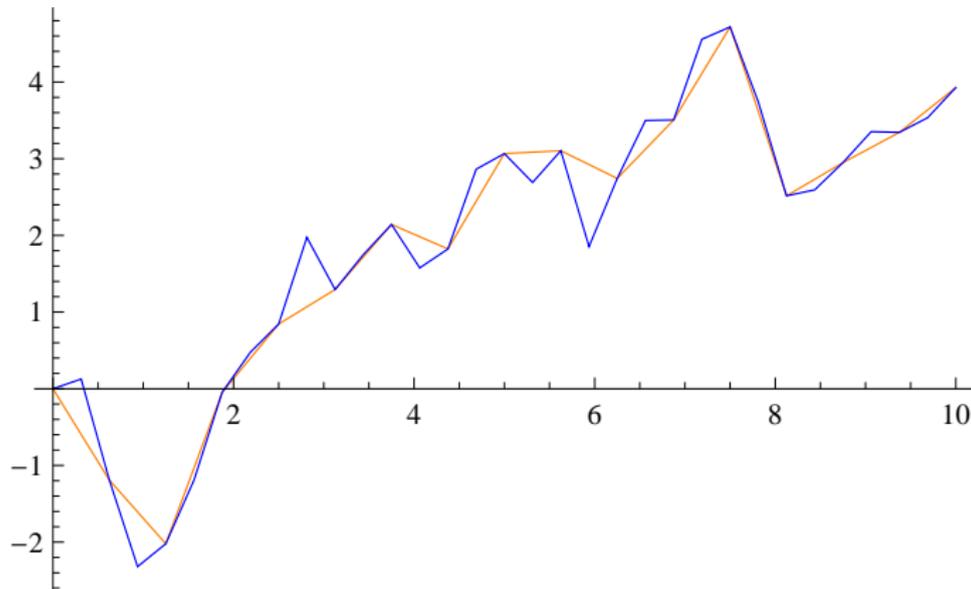
Die Brownsche Brücke



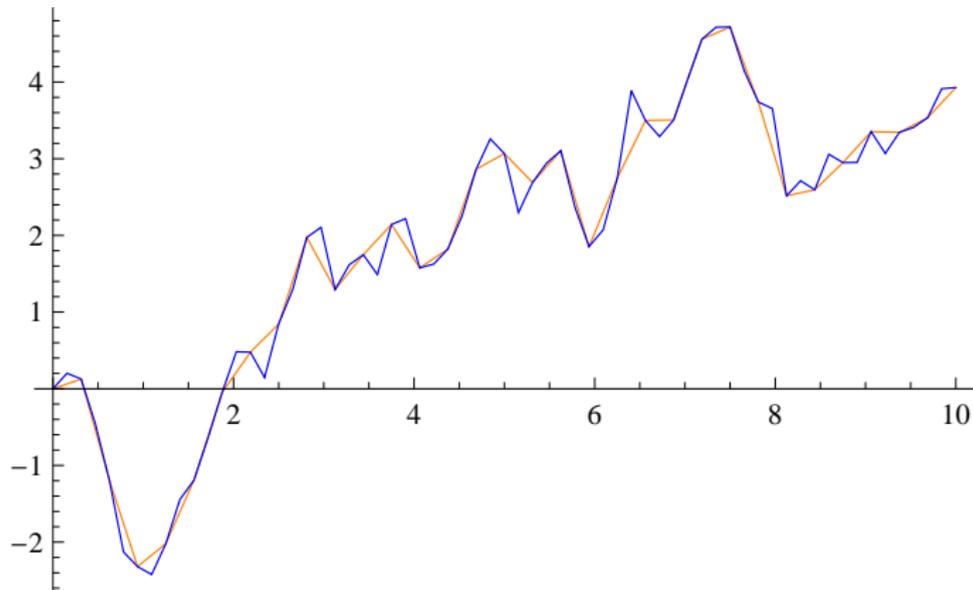
Die Brownsche Brücke



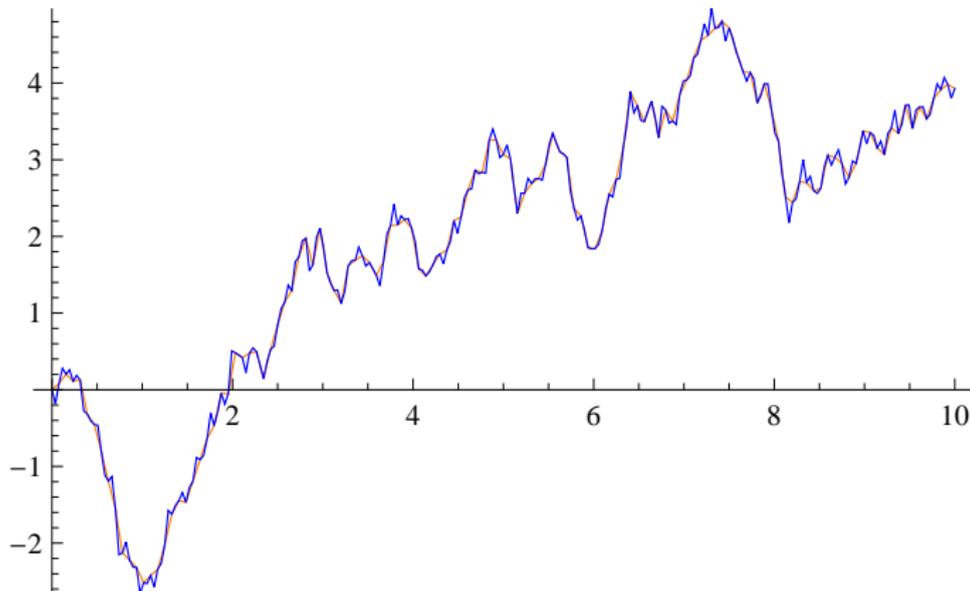
Die Brownsche Brücke



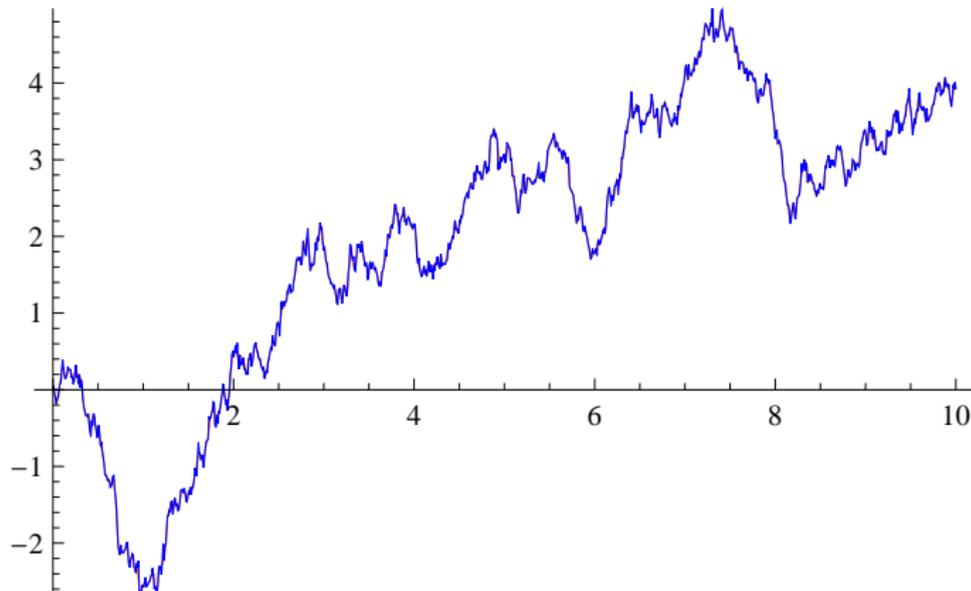
Die Brownsche Brücke



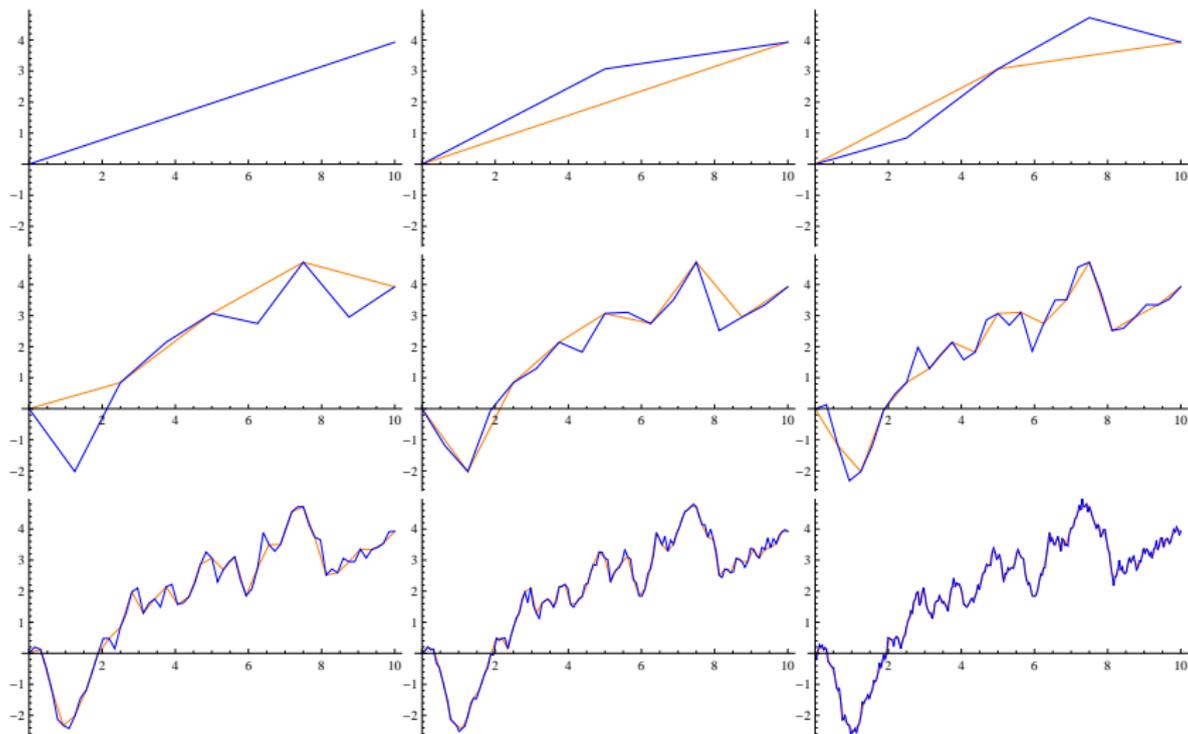
Die Brownsche Brücke



Die Brownsche Brücke



Die Brownsche Brücke



Beispiel: Asiatische Option im Black-Scholes Modell

Betrachte das Black-Scholes Modell (d.h. risikoloser Zinssatz i , Aktiendynamik von S_t nach einer geometrischen Brownschen Bewegung $S_t \sim GBM(\mu, \sigma^2)$) mit $i = 0.05$ und $\sigma^2 = 0.2$. Gesucht ist der Preis einer asiatischen Option mit Strike $K = 1.3$ und Maturity $T = 1$, die zum Zeitpunkt T die Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel des Kurses zu den Zeitpunkten $\frac{1}{2}, \frac{N/2+1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1$ und dem Strike K auszahlt (wenn positiv):

$$Y_T = \left(\frac{2}{N} \sum_{i=N/2}^N S_{i/N} - K \right)^+$$

Dynamik des diskontierten Wertpapierkurses \tilde{S}_t unter \mathbb{Q} : geom. BB ohne Drift

$$\tilde{S}_t - \tilde{S}_s \sim \log \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \cdot (t - s) \right)$$

(bzw. S_t folgt einer geom. BB mit Drift i)

Preis der Option zu t :

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{Y}_T \mid \underbrace{\mathcal{F}_t}_{\text{ges. Historie bis } t} \right] \quad V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{Y}_T \right]$$

EW ist $N/2$ -dimensionales Integral über die Verteilungen von \tilde{S}_t zu den Zeitpunkten $\frac{1}{2}, \frac{N/2+1}{N}, \dots, 1$.

Bewertung der asiat. Option als MC-Algorithmus

Algorithmus

④ Erzeuge Pfad k des Aktienverlaufs und daraus die Auszahlung $\tilde{Y}_T^{(k)}$:

① Setze $S_0 = 1$

② $S_{(n+1)/N} = S_{n/N} \exp(X_n)$ mit $X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{r}{N}, \frac{\sigma^2}{N}\right)$.

Oder besser aus Brownscher Brücke:

① Setze $X_0 = 0$, $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (Standard-BB)

② berechne Standard-BB an benötigten Zwischenstellen durch Brücke

③ Rechne durch $S_t = \exp(rt + \sigma X_t)$ auf geom. BB um

② Aus $S_{k/N}$ berechne Payoff Y_T und dessen Barwert \tilde{Y}_T für diesen konkreten Verlauf

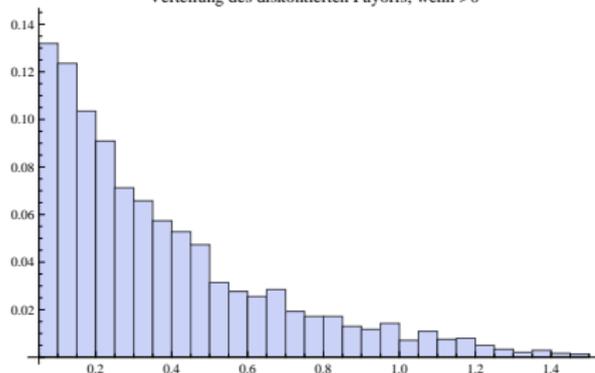
③ Führe 1 M -mal durch

④ Der Preis der Option ergibt sich durch den MC-Schätzer:

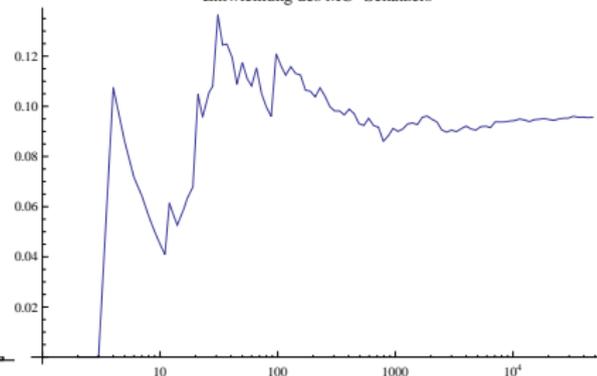
$$V_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{Y}_T^{(i)}$$

Bemerkung: Die Varianz kann im selben Run mitbestimmt werden

Bemerkung: Die M bestimmten Werte der Payoffs approximieren die Verteilung des (diskontierten) Payoffs.

Verteilung des diskontierten Payoffs, wenn >0 

Entwicklung des MC-Schätzers



Es ergibt sich ein Monte Carlo Schätzer bei $N = 50000$ von $V_0 = 0.09568$, die Standardabweichung des diskontierten Payoffs beträgt $\sigma(\text{Option}) = 0.2339$.

Übersicht

- 1 Monte-Carlo Methoden zur Integration (Erwartungswerte): Bewertung der Anlagen; Versicherungen mit stochastischem Zins
- 2 **Simulation von Verteilungen**
 - Definitionen
 - Beispiel: Schwankungsrisiko
 - Beispiel Schwankungsrisiko: Portfoliobetrachtung
 - Beispiel Schwankungsrisiko: Simulationsalgorithmus
 - Beispiel Schwankungsrisiko: Ergebnisse
- 3 Monte-Carlo Methoden zur Simulation von Verteilungen: Risikoanalyse von Sterblichkeitsmodellen

Simulation von Verteilungen

Bemerkung

Für Risikobewertung meist nicht Erwartungswert, sondern gesamte Verteilung (bzw. Quantile, bed. EW) nötig, z.B. für V@R, Expected Shortfall, Konfidenzintervalle für Schätzer, etc.

Theorem

Sei F eine eindimensionale Verteilungsfunktion mit verallgemeinerter Inverser $F^{-1}(x)$ und $U \sim U(0, 1)$ eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Dann gilt:

$$U \sim U(0, 1) \Rightarrow F^{-1}(U) \sim F$$

Auch wenn die Transformation (d.h. die Abhängigkeit von den zugrundeliegenden Zufallsvariablen) analytisch genau bekannt ist, können die resultierende Verteilung oder deren Quantile meist nicht analytisch angegeben werden \Rightarrow Simulation notwendig

Empirische Verteilung

Definition

Sei (X_n) Folge von N iid. Samples. Deren empirische Verteilungsfunktion $\tilde{F}_N(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{F}_N(x) = \frac{1}{N} \# \{X_n | X_n \leq x\}$$

Satz

Die empirische Verteilung $\tilde{F}_N(x)$ approximiert die exakte Verteilung $F(x)$ und es gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{F}_N(x) = F(x)$ (für einen geeigneten Konvergenzbegriff).

Beispiel: Schwankungsrisiko eines Versicherungsportfolios

Problem (Schwankungsrisiko)

Versicherungen basieren auf starken Gesetz der großen Zahlen und dem zentralen Grenzwertsatz. NEP eines Renten-Portfolios von n Versicherten im Alter x im Erwartungswert \ddot{a}_x .

Je kleiner der Bestand, desto größer die mögliche Schwankung um \ddot{a}_x .

Problem (Fragestellung:)

Welche Einmalprämien müsste verlangt werden, um mit dem vorhandenen Kapital in z.B. 99% Wahrscheinlichkeit tatsächlich auszukommen?

Gesucht ist damit das einseitige 99%-Konfidenzintervall, bzw. das 0.99-Quantil der Verteilung.

Beispiel

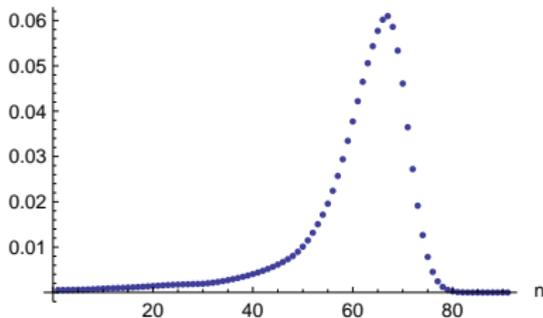
Leibrenten an 1980 geborene österr. Männer (nach AVÖ 2005R), $i = 0.025$
 Die zukünftige Lebenserwartung beträgt 61.06 Jahre, die NEP der LR
 $\ddot{a}_{30} = 31.56$.

Bei einem Portfolio aus n derartigen Männern, wie hängt die Verteilung des gesamten Barwerts (Schwankung um \ddot{a}_{30}) von n ab?

Verteilung eines einzelnen Versicherten:

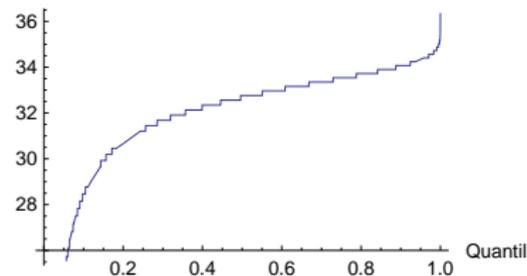
Todeswahrscheinlichkeit genau in Jahr n

${}_n p_x \cdot q_{x+n}$



Quantile des Rentenbarwerts

Renten-BW



Von den n Versicherten sterben manche früh, manche spät.

Z.B. Portfolio aus 3 Personen x_1, x_2, x_3 , zuk. Lebensdauern $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$:

T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}	tats. Zahlungen / Polizze
52	39	55	28.7891
68	70	54	32.631
58	53	71	31.9042
41	31	72	27.7005
60	54	67	31.9058

- Schwankung nimmt mit der Anzahl der Polizzen n ab (lt. zentralem Grenzwertsatz):
- Approximation des Konfidenzintervalls in diesem Fall auch mit Normalverteilungsapproximation möglich.

Von den n Versicherten sterben manche früh, manche spät.

Z.B. Portfolio aus 3 Personen x_1, x_2, x_3 , zuk. Lebensdauern $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$:

T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}	tats. Zahlungen / Polizze
52	39	55	28.7891
68	70	54	32.631
58	53	71	31.9042
41	31	72	27.7005
60	54	67	31.9058

- Schwankung nimmt mit der Anzahl der Polizzen n ab (lt. zentralem Grenzwertsatz):
- Approximation des Konfidenzintervalls in diesem Fall auch mit Normalverteilungsapproximation möglich.

Von den n Versicherten sterben manche früh, manche spät.

Z.B. Portfolio aus 3 Personen x_1, x_2, x_3 , zuk. Lebensdauern $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$:

T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}	tats. Zahlungen / Polizze
52	39	55	28.7891
68	70	54	32.631
58	53	71	31.9042
41	31	72	27.7005
60	54	67	31.9058

- Schwankung nimmt mit der Anzahl der Polizzen n ab (lt. zentralem Grenzwertsatz):
- Approximation des Konfidenzintervalls in diesem Fall auch mit Normalverteilungsapproximation möglich.

Von den n Versicherten sterben manche früh, manche spät.

Z.B. Portfolio aus 3 Personen x_1, x_2, x_3 , zuk. Lebensdauern $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$:

T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}	tats. Zahlungen / Polizze
52	39	55	28.7891
68	70	54	32.631
58	53	71	31.9042
41	31	72	27.7005
60	54	67	31.9058

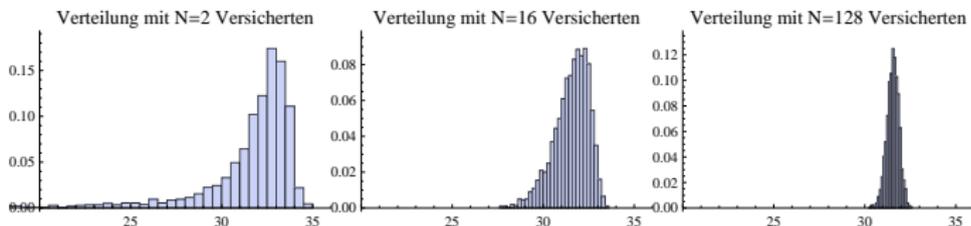
- Schwankung nimmt mit der Anzahl der Polizzen n ab (lt. zentralem Grenzwertsatz):
- Approximation des Konfidenzintervalls in diesem Fall auch mit Normalverteilungsapproximation möglich.

Von den n Versicherten sterben manche früh, manche spät.

Z.B. Portfolio aus 3 Personen x_1, x_2, x_3 , zuk. Lebensdauern $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$:

T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}	tats. Zahlungen / Polizza
52	39	55	28.7891
68	70	54	32.631
58	53	71	31.9042
41	31	72	27.7005
60	54	67	31.9058

- Schwankung nimmt mit der Anzahl der Policen n ab (lt. zentralem Grenzwertsatz):



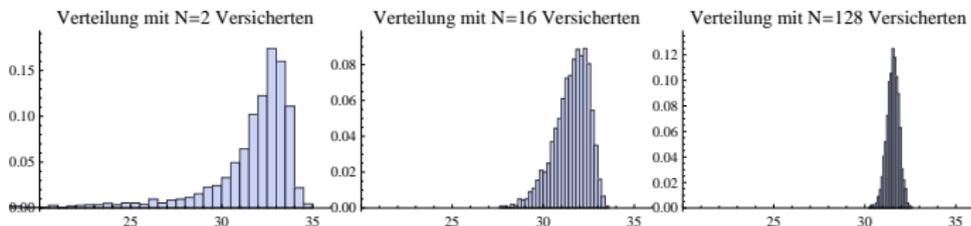
- Approximation des Konfidenzintervalls in diesem Fall auch mit Normalverteilungsapproximation möglich.

Von den n Versicherten sterben manche früh, manche spät.

Z.B. Portfolio aus 3 Personen x_1, x_2, x_3 , zuk. Lebensdauern $T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3}$:

T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}	tats. Zahlungen / Polizza
52	39	55	28.7891
68	70	54	32.631
58	53	71	31.9042
41	31	72	27.7005
60	54	67	31.9058

- Schwankung nimmt mit der Anzahl der Polizen n ab (lt. zentralem Grenzwertsatz):



- Approximation des Konfidenzintervalls in diesem Fall auch mit Normalverteilungsapproximation möglich.

Ablauf der Simulation mit Monte Carlo

Algorithmus (Verteilung des mittl. Barwerts von n Polizen)

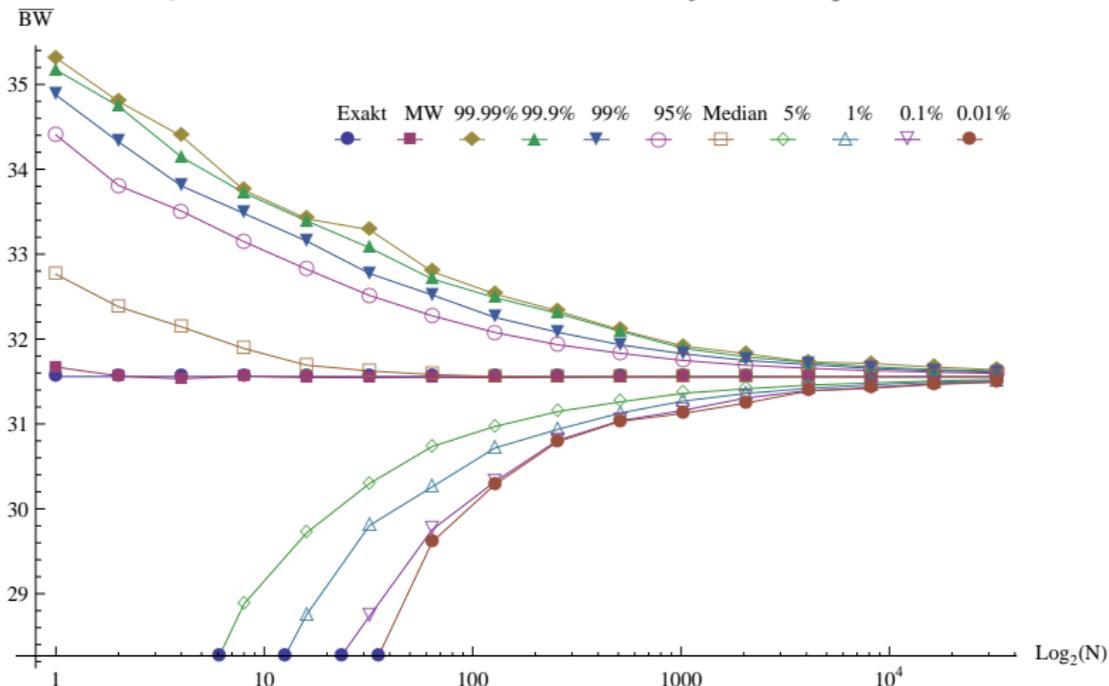
- ① erzeuge ein Sample $(T_{x_1}, \dots, T_{x_n})$ mit T_{x_k} iid. nach der Sterbetafel verteilt:
Für jedes x_k :
 - ① erzeuge $u \sim U(0, 1)$ gleichverteilt auf $[0, 1]$
 - ② bestimme T_x durch $T_x = G^{-1}(u) = \min \{t \mid {}_t p_x < u\}$
- ② für jedes T_{x_k} berechne Barwert der Auszahlungen

$$Y_k = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{T_x \geq i} v^i = \ddot{a}_{T_{x_k}}$$
- ③ berechne mittleren Barwert des Portfolios durch $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n Y_k$
- ④ führe die obigen Schritte N -mal durch (bis genügend Samples für die empirische Verteilung vorhanden sind).

Aus der so erzeugten empirischen Verteilung bestimme die Quantile, die bedingten Erwartungswerte, etc.

Quantile

Quantile des Gesamt-BW bei N Versicherten, je 2000 Samples

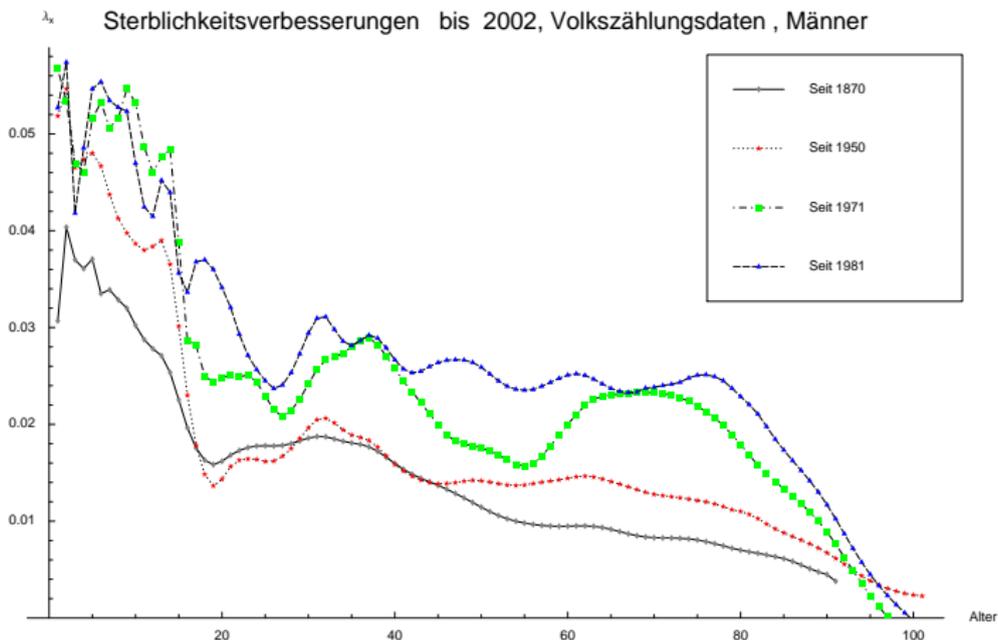


Übersicht

- 1 Monte-Carlo Methoden zur Integration (Erwartungswerte): Bewertung der Anlagen; Versicherungen mit stochastischem Zins
- 2 Simulation von Verteilungen
- 3 Monte-Carlo Methoden zur Simulation von Verteilungen: Risikoanalyse von Sterblichkeitsmodellen
 - Generationentafeln
 - Datenmaterial
 - Allgemeine Form der Generationentafel
 - Der Ansatz von Lee-Carter (1992)
 - OLS Fit aus den Sterbewahrscheinlichkeiten
 - Ergebnisse für Österreich
 - Projektion in die Zukunft
 - Verbesserungen
 - Risikoanalyse (Konfidenzintervalle für Lebenserwartung, Rentenbarwerte etc.): Bootstrapping

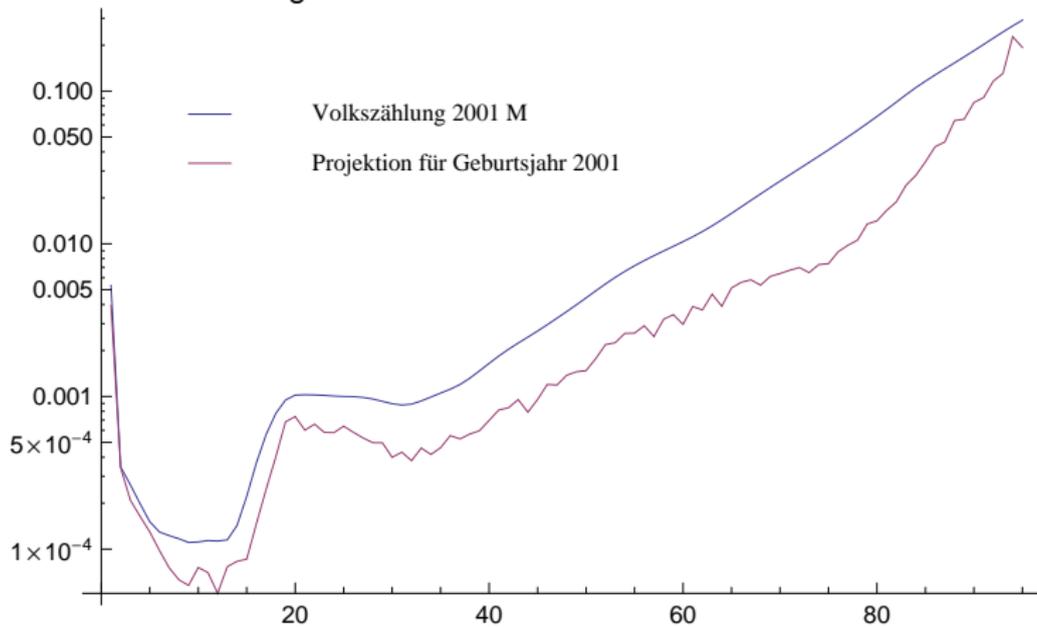
Sterblichkeitsverbesserung

Sterblichkeit der Volkszählungen: Sterbewahrscheinlichkeit nimmt (altersabhängig) ab. Mittlere jährliche Verbesserung:



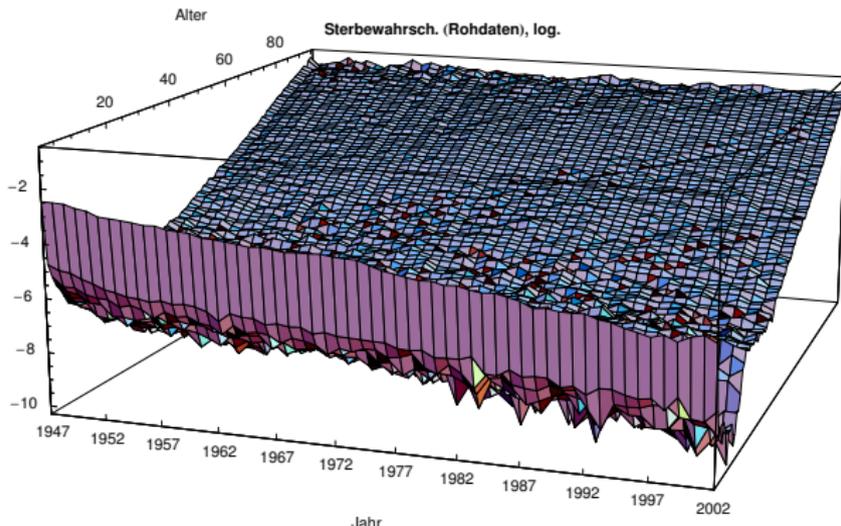
Vergleich: Sterbetafel einer 1980 geborenen Person (1) nach Periode(n)tafel 2001 (Volkszählung) und (2) extrapoliert mit Sterblichkeitsverbesserung

Vergleich Periode(n)tafel vs. Generationentafel



Verwendbare Daten (der Gesamtbevölkerung)

- fortgeschriebene jährliche Sterbewahrscheinlichkeiten (Statistik Austria), seit 1947
- Volkszählungen seit 1870
- internationale Vergleiche (deutsche / schweizer Bevölkerungs- und Rententafeln, mortality.org, etc.)



Form der Generationentafel

Problem (Gewünschte Form der Generationentafel)

Aus den bekannten Sterbetafeln der Vergangenheit soll eine Tafel für die Sterblichkeiten $q_x(t)$ erzeugt werden in folgender Form:

$$q_x(t) = q_x(t_0) \cdot \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0))$$

(log-lineare Extrapolation mit Trend λ_x ausgehend von Basisjahr t_0)

1. Ansatz (klassisch):

Ansatz (klassische Schätzung der Trendfaktoren)

Für jedes Alter x betrachte die Sterblichkeiten $q_x(t)$ für $t \leq t_0$ und fitte den Parameter λ_x durch (z.B. lineare) Regression

Problem: λ_x und λ_{x+1} unabhängig voneinander gefittet \Rightarrow Projektion kann stark schwanken, keine glatte Sterblichkeitskurve in der Zukunft. Daher nachträgliche Glättung nötig (mathematische Eigenschaften???)

Der Lee-Carter Ansatz (1992)

Ansatz (Lee-Carter Methode)

Die Sterblichkeit ($\log \mu_x(t)$) wird als log-bilinear angenommen mit stochastischen Fehlertermen

$$\underbrace{\log \hat{\mu}_x(t)}_{\text{beob. (schwankend)}} = \underbrace{\log \mu_x(t)}_{\text{tatsächlich}} + \underbrace{\varepsilon_x(t)}_{\text{homosked. stoch. Fehlerterm}}$$

mit

$$\log \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t$$

α_x mittlere Sterblichkeit

κ_t Trend (mittl. Verbesserung pro Jahr)

β_x Einfluss des Trends auf Alter x

Es gilt $q_x = 1 - \exp(-\mu) \stackrel{\text{Taylor}}{=} 1 - \left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^3}{3!} + \dots\right) = \mu - \frac{\mu^2}{2} + \dots \approx \mu$
 in 1. Näherung. Lee-Carter in \ddot{O} auf $q_x(t)$ statt $\mu_x(t)$ angewendet.

Normierung der Lee-Carter Zerlegung

Darstellung ist nicht eindeutig, daher Normierung:

Bemerkung (Normierung von Lee-Carter)

Um Eindeutigkeit zu gewährleisten, wird folgende Normierung gefordert:

$$\sum_t \kappa_t = 0 \quad \sum_x \beta_x = 1$$

Leicht zu erreichen:

- $\sum_t \kappa_t = 0$ durch $(\kappa_t, \alpha_x) \mapsto (\kappa_t - \bar{\kappa}_t, \alpha_x + \beta_x \cdot \bar{\kappa}_t)$
- $\sum_x \beta_x = 1$ durch $(\beta_x, \kappa_t) \mapsto (\beta_x / \|\beta\|_1, \|\beta\|_1 \kappa_t)$

Ordinary Least-Squares (OLS) Fit aus den Sterbewahrscheinlichkeiten

Problem (OLS-Fit an $q_x(t)$ (in Österreich))

Finde Parameter $\alpha_x, \beta_x, \kappa_x$, die die Zielfunktion

$$\left(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t\right) = \underset{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{x,t} (\log \hat{q}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

minimieren.

Ableitung nach α_x für ein fixes x liefert (mit $\sum_t \kappa_t = 0$)

$$0 = \sum_t (\log q_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t) = \sum_t \log q_x(t) - \underbrace{n}_{\text{\#Jahre}} \cdot \alpha_x - \beta_x \sum_t \kappa_t$$

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{n} \sum_t \log q_x(t) \dots \text{mittlere log. Sterblichkeit}$$

Rest:

$$Z_{x,t} := \log q_x(t) - \alpha_x \approx \beta_x \kappa_t$$

mit β_x, κ_t gesucht. Regression nicht möglich...

Ordinary Least-Squares (OLS) Fit aus den Sterbewahrscheinlichkeiten

Problem (OLS-Fit an $q_x(t)$ (in Österreich))

Finde Parameter $\alpha_x, \beta_x, \kappa_x$, die die Zielfunktion

$$\left(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t\right) = \underset{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{x,t} (\log \hat{q}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

minimieren.

Ableitung nach α_x für ein fixes x liefert (mit $\sum_t \kappa_t = 0$)

$$0 = \sum_t (\log q_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t) = \sum_t \log q_x(t) - \underbrace{n}_{\text{\#Jahre}} \cdot \alpha_x - \beta_x \sum_t \kappa_t$$

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{n} \sum_t \log q_x(t) \dots \text{mittlere log. Sterblichkeit}$$

Rest:

$$Z_{x,t} := \log q_x(t) - \alpha_x \approx \beta_x \kappa_t$$

mit β_x, κ_t gesucht. Regression nicht möglich...

OLS Fit durch Singulärwertzerlegung

Definition (Singulärwertzerlegung)

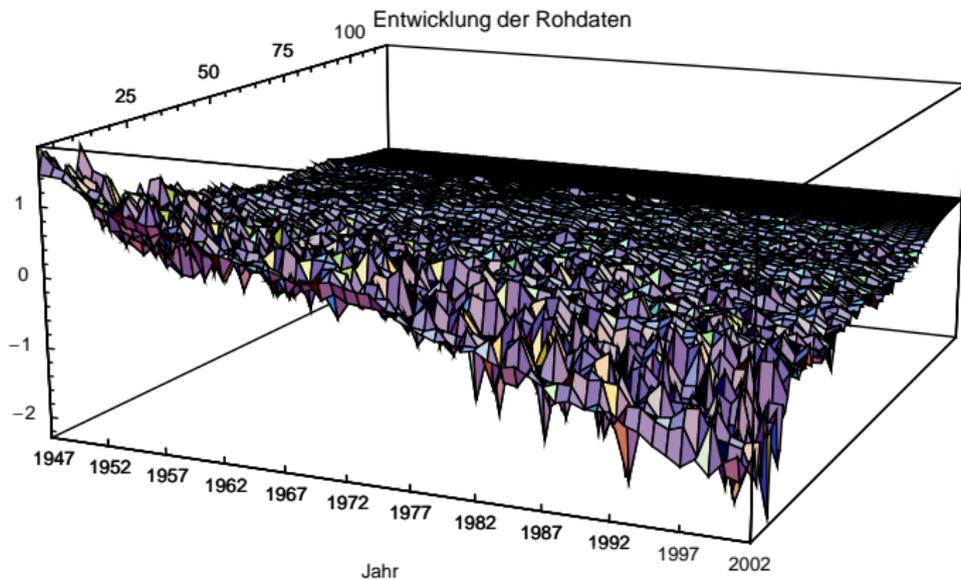
Sei $Z = U \cdot S \cdot V^t$ die Singulärwertzerlegung der $n \times m$ -Matrix $Z = (Z_{x,t})$, d.h. U und V sind orthogonale Matrizen der Eigenvektoren der quadratischen Matrizen $Z^t \cdot Z$ und $Z \cdot Z^t$ und S ist die Matrix der zugehörigen Singulärwerte (Wurzeln der Eigenwerte von $Z \cdot Z^t$).

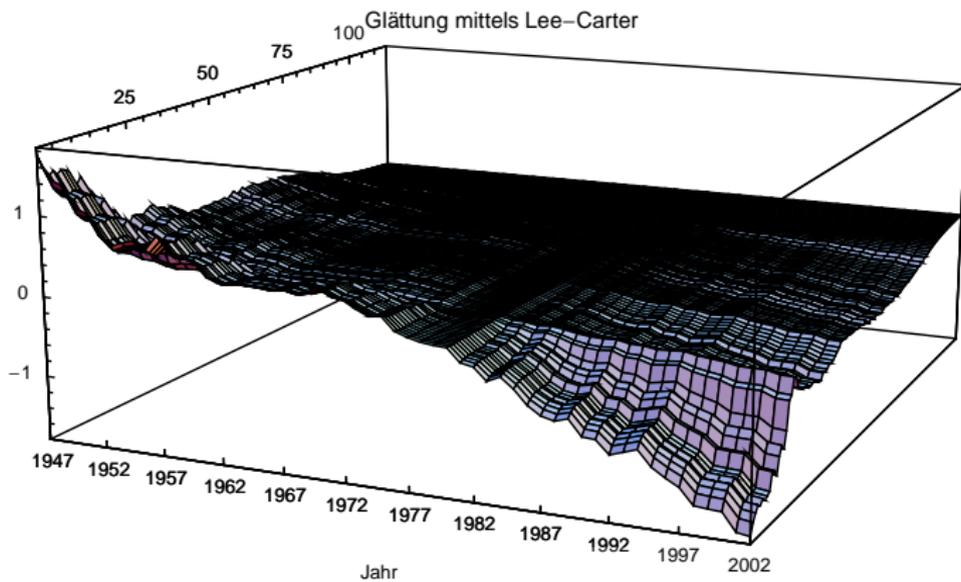
- Dann ist der erste Term der SVZ der OLS Fit in bilinearer Form an die Matrix Z (noch nicht normiert):

$$\hat{\beta}_x = u_x^1 \quad \text{und} \quad \hat{\kappa}_t = s^1 \cdot v_t^1$$

mit den zum größten Singulärwert s^1 gehörigen Singulärvektoren u^1 und v^1 .

- Die restlichen Terme der Singulärwertzerlegung beschreiben einen immer größeren Teil der Schwankung





SVZ als OLS-Fit an die Matrix (Theorem)

Satz

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ oBdA. und Rang $r \leq n$. Die Singulärwertzerlegung ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^t \quad \text{mit } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit orthogonalen Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} und einer Diagonalmatrix $\hat{\mathbf{D}}$ mit nicht-negativen Einträgen $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_n = 0$ (den Singulärwerten von \mathbf{A}).

Dann stellt der erste Term

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^t = s_1\mathbf{u}\mathbf{v}^t$$

der SVZ, wobei s_1 der größte Singulärwert von \mathbf{A} mit den zugehörigen (nicht notwendigerweise eindeutigen) links- und rechts-Singulärvektoren $\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\cdot,1}$ und $\mathbf{v} = \mathbf{V}_{\cdot,1}$ ist, die beste bilineare Approximation (im Least-Squares Sinn) der Form $\mathbf{x}\mathbf{y}^t$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dar.

Projektion der Sterblichkeit in die Zukunft

- Zeitliche Entwicklung nur in $\kappa_t \Rightarrow$ als ARIMA(0,1,0) Zeitreihe interpretiert

Bemerkung (Extrapolation der κ_t)

Annahme: κ_t hat die Dynamik einer ARIMA(0,1,0)-Zeitreihe:

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta\kappa + \delta_t$$

Lineare Extrapolation mit $\Delta\kappa$ (nach Theorie der Zeitreihen gefittet) pro Jahr!

- Konfidenzintervall für Extrapolation: δ_t als $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ angenommen, daher um n Jahre extrapoliertes Wert verteilt nach: $\sim \mathcal{N}(n\Delta\kappa, n\sigma^2)$. Nur sinnvoll, wenn sonst keinerlei Unsicherheit im Spiel !?!

Projektion der Sterblichkeit in die Zukunft

- Zeitliche Entwicklung nur in $\kappa_t \Rightarrow$ als ARIMA(0,1,0) Zeitreihe interpretiert

Bemerkung (Extrapolation der κ_t)

Annahme: κ_t hat die Dynamik einer ARIMA(0,1,0)-Zeitreihe:

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta\kappa + \delta_t$$

Lineare Extrapolation mit $\Delta\kappa$ (nach Theorie der Zeitreihen gefittet) pro Jahr!

- Konfidenzintervall für Extrapolation: δ_t als $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ angenommen, daher um n Jahre extrapoliertes Wert verteilt nach: $\sim \mathcal{N}(n\Delta\kappa, n\sigma^2)$. Nur sinnvoll, wenn sonst keinerlei Unsicherheit im Spiel !!?

Verbesserungen / Probleme

- ε_x ist nicht homoskedastisch (für hohe Alter stärkere Schwankung wegen geringer Lebenden-/Totenzahl) \Rightarrow Normierung mit empirischer Varianz $\hat{\sigma}_x^2$ für jedes Alter x (aus vorhanden Daten geschätzt):

$$\tilde{Z}_{x,t} := \frac{\log q_x(t) - \hat{\alpha}_x}{\hat{\sigma}_x}$$

Damit haben alle Daten etwa dieselbe Schwankung

- Wenn Totenzahlen exakt bekannt:
 - Modifikation der α_x , β_x und κ_t möglich, sodass exakte Totenzahl reproduziert werden.
 - Maximum-Likelihood Fit unter Poisson-Annahme möglich statt OLS fit!

Modell- und Parameter-Risiko-Analyse: Bootstrapping

Konfidenzintervalle der Projektion für $\mu_x(t)$, $e_x(t)$, $\ddot{a}_x(t)$ etc. nicht analytisch möglich, da

- 2 Unsicherheitsquellen vorhanden: Fit der Parameter an die Daten und Projektion der Zeitreihe in die Zukunft
- Größen hängen höchst nichtlinear (nicht-monoton) von α_x , β_x , κ_t und $\Delta\kappa$ ab!

Konfidenzintervalle aber möglich durch Simulation der Verteilung, wobei die Ausgangsparameter variiert werden (Parameter α_x , β_x und κ_t , oder die Totenzahlen, wenn vorhanden): **Bootstrapping**

Bootstrapping

Algorithmus ((parametr.) Bootstrap der Vert. von $\mu_x(t)$, $e_x(t)$, $\ddot{a}_x(t)$, etc.)

Jedes Sample m wird folgendermaßen erzeugt:

- ① Nach der Annahme, dass $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ multivariat- \mathcal{N} verteilt, erzeuge ein Sample $(\alpha_x^m, \beta_x^m, \kappa_t^m)$ (Totenzahlen nicht benötigt bzw. nicht vorhanden)
- ② Schätze $\Delta\kappa^m$ nach der Zeitreihenanalyse aus den κ_t^m
- ③ Projiziere die Tafel mit den oben erzeugten Parametern $(\alpha_x^m, \beta_x^m, \kappa_t^m)$ und $\Delta\kappa_t^m$ in die Zukunft
- ④ Berechne daraus das Sample der gewünschten Größe $\mu_x(t)$, $e_x(t)$, $\ddot{a}_x(t)$, etc.

Annahmen: Multivariate Normalverteilung der α, β, κ ; EW und Varianz-/Kovarianz der α, β, κ bekannt.

Wenn Totenzahlen bekannt: Semi-/Nicht-parametrischer Bootstrap

- Benutze Poisson-Annahme, erzeuge entsprechend neue Totenzahl $d_x^m(t)$ nach Poisson
- Schätze daraus $q_x^m(t)$ und α, β, κ
- Rest wie oben

Bootstrapping

Algorithmus ((parametr.) Bootstrap der Vert. von $\mu_x(t)$, $e_x(t)$, $\ddot{a}_x(t)$, etc.)

Jedes Sample m wird folgendermaßen erzeugt:

- ① Nach der Annahme, dass $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ multivariat- \mathcal{N} verteilt, erzeuge ein Sample $(\alpha_x^m, \beta_x^m, \kappa_t^m)$ (Totenzahlen nicht benötigt bzw. nicht vorhanden)
- ② Schätze $\Delta\kappa^m$ nach der Zeitreihenanalyse aus den κ_t^m
- ③ Projiziere die Tafel mit den oben erzeugten Parametern $(\alpha_x^m, \beta_x^m, \kappa_t^m)$ und $\Delta\kappa_t^m$ in die Zukunft
- ④ Berechne daraus das Sample der gewünschten Größe $\mu_x(t)$, $e_x(t)$, $\ddot{a}_x(t)$, etc.

Annahmen: Multivariate Normalverteilung der α, β, κ ; EW und Varianz-/Kovarianz der α, β, κ bekannt.

Wenn Totenzahlen bekannt: Semi-/Nicht-parametrischer Bootstrap

- Benutze Poisson-Annahme, erzeuge entsprechend neue Totenzahl $d_x^m(t)$ nach Poisson
- Schätze daraus $q_x^m(t)$ und α, β, κ
- Rest wie oben

ZUSATZ- / RESERVEFOLIEN

Übersicht

- 4 Zusatzfolien: Erzeugung von nicht-gleichverteilten Zufallszahlen in 1 Dimension
 - Inversionsmethode
 - Acceptance-Rejection Methode
 - Ratio-of-Uniforms Methode
 - Spezialisierte Verfahren: Box-Muller für Normalverteilung

- 5 Zusatzfolien: Quasi-Monte Carlo Methoden

Erzeugung von nicht-gleichverteilten Zufallszahlen in 1 Dimension

Nicht-gleichverteilte ZZ oft benötigt, am Computer nur `rand()` etc. implementiert (gleichverteilte ZZ)!

- Inversionsmethode: Verteilungsfunktion muss bekannt und invertierbar sein
- Acceptance-Rejection: Dichte muss bekannt sein, zahlreiche Zahlen werden verworfen, um richtige Verteilung zu erhalten
- Ratio-of-Uniforms: Sampling als Quotient zweier gleichverteilter Zufallszahlen

Spezialisierte Verfahren:

- Box-Muller: Erzeugung von Normalverteilten Zufallszahlen

Inversionsmethode in 1 Dimension

Satz (Inversionsmethode)

Sei $F(z)$, $F : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion ($F(a) = 0$, $F(b) = 1$, mon. steigend) mit verallgemeinerter Inverser

$$F^{-1}(u) = \inf \{z \in [a, b] : F(z) \geq u, 0 \leq u \leq 1\} .$$

Sei $U \sim U(0, 1)$ eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable, dann hat $Z = F^{-1}(U)$ die Verteilung F . Wenn umgekehrt $Z \sim F$, dann ist $F(Z) \sim U(0, 1)$.

- Vorteil: Monotonie bleibt erhalten.
- Nachteil: Inverse Verteilungsfunktion muss analytisch bekannt sein (numerisch zu hoher Aufwand)

Acceptance-Rejection Methode

Satz (Acceptance-Rejection Methode, J.v. Neumann, 1951)

Für eine Verteilung $F(u) = \int_{-\infty}^u f(z)dz$ finde eine leichter zu sampelnde Verteilung G mit Dichte g , sodass $f(x) \leq cg(t)$ für eine Konstante $c \geq 1$.
Erzeuge je zwei unabhängige Zufallsvariablen

$$X \sim U(0,1) \quad \text{und} \quad Z \sim G.$$

Falls $c \cdot x > f(z)/g(z)$, verwirf dieses Sample und erzeuge zwei neue Samples (X, Z) . Anderenfalls akzeptiere dieses Sample z . Die akzeptierten z sind genau F -verteilt.

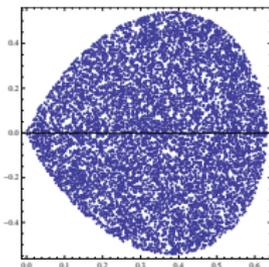
- Vorteil: nur Dichte nötig, daher sehr allgemein
- Bei Suche nach G vor allem Tail relevant
- Nachteil: Wenn G sich stark von F unterscheidet (Konstante c groß), werden viele Samples verworfen: $\mathbb{P}(\text{zangenommen}) = 1/c$

Ratio-of-Uniforms Methode

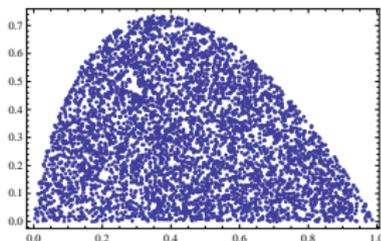
Satz (Ratio-of-Uniforms Methode, Kinderman/Monahan, 1977)

Sei $A = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \sqrt{f\left(\frac{v}{u}\right)} \right\}$, wobei $f \geq 0$ eine integrierbare Funktion ist. Wenn (U, V) auf A gleichverteilt ist, dann hat $Z = \frac{V}{U}$ die Dichte $\frac{1}{c}f(x)$ mit $c = \int f = 2 \text{ area}(A)$.

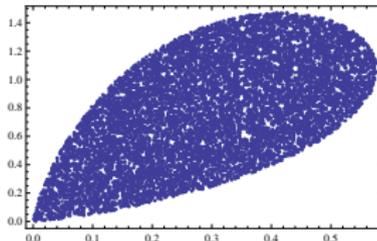
- Erzeugung der Gleichverteilung auf A : Lege Rechteck um A , erzeuge darauf Gleichverteilung und akzeptiere nur die Punkte, die in A liegen.
- Vorteil: Dichte muss nicht normiert sein!
- Nachteil: Bei nicht allen Verteilungen ist A beschränkt.



Normalverteilung



Exponentialverteilung



Inverse Gaussverteilung

Box-Muller Methode zur Normalverteilung

Normalverteilte Zufallszahlen z.B. für Brownsche Bewegung oft benötigt.

Satz (Box-Muller zur Erzeugung von $\mathcal{N}(0, 1)$ Zufallsvariablen)

Seien $U \sim U(0, 1)$, $V \sim \mathcal{E}_{\frac{1}{2}}(1)$ unabhängig. Dann sind

$$X = \sqrt{2V} \cos 2\pi U, \quad Y = \sqrt{2V} \sin 2\pi U$$

unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen.

Bemerkung

Äquivalent dazu ist: Seien U_1 und U_2 zwei unabhängige $U(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Dann ist

$$(X, Y) = \left(\sqrt{-2 \log U_2} \cos 2\pi U_1, \sqrt{-2 \log U_2} \sin 2\pi U_1 \right) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$$

ein Paar von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen.

Übersicht

- 4 Zusatzfolien: Erzeugung von nicht-gleichverteilten Zufallszahlen in 1 Dimension

- 5 Zusatzfolien: Quasi-Monte Carlo Methoden
 - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
 - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
 - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
 - Beispiel: Asiatische Option im NIG-Modell

Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über N zufällig gewählte Stützstellen $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$ in $U^s = [0, 1]^s$:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (2)$$

- (2) gilt für quadratisch integrierbare f (d.h. $\sigma(f)$ existiert)
- Fehlerordnung: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ (unabh. von $s!$)
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
 - Benutze Glg. (2) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
 - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
 - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über N zufällig gewählte Stützstellen $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$ in $U^s = [0, 1]^s$:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (2)$$

- (2) gilt für quadratisch integrierbare f (d.h. $\sigma(f)$ existiert)
- Fehlerordnung: $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$ (unabh. von $s!$)
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
 - Benutze Glg. (2) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
 - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
 - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über N zufällig gewählte Stützstellen $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$ in $U^s = [0, 1]^s$:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (2)$$

- (2) gilt für quadratisch integrierbare f (d.h. $\sigma(f)$ existiert)
- Fehlerordnung: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ (unabh. von $s!$)
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
 - Benutze Glg. (2) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
 - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
 - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

(Stern-) Diskrepanz $D_N^*(S)$ einer Folge $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$ definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen $[0, \mathbf{a})$:

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (3)$$

mit $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$... Zahl der Punkte in J und $\lambda_s(J)$ das Lebesgue-Maß von J .

Theorem (Koksma-Hlawka Unglg., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ auf U^s im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (4)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit f und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerabschätzung)

Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

(Stern-) Diskrepanz $D_N^*(S)$ einer Folge $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$ definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen $[0, \mathbf{a})$:

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (3)$$

mit $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$... Zahl der Punkte in J und $\lambda_s(J)$ das Lebesgue-Maß von J .

Theorem (Koksma-Hlawka Unglg., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ auf U^s im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (4)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit f und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerabschätzung)

Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

(Stern-) Diskrepanz $D_N^*(S)$ einer Folge $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$ definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen $[0, \mathbf{a})$:

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (3)$$

mit $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$... Zahl der Punkte in J und $\lambda_s(J)$ das Lebesgue-Maß von J .

Theorem (Koksma-Hlawka Unglg., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ auf U^s im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (4)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit f und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerabschätzung)

Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Konstruktion von deterministischen Folgen mit möglichst kleiner Diskrepanz (= gute Gleichverteilungseigenschaften)

Folgen kleiner Diskrepanz

Die besten bekannten Folgen, genannt **Folgen kleiner Diskrepanz**, haben eine Diskrepanz der Ordnung (vermutlich bestmöglich) (mit C_s nur von Folge und Dim. abhängig \Rightarrow Tractability):

$$D_N^*(S) \leq C_s \frac{(\log N)^s}{N} \quad (5)$$

Beispiele von Folgen kleiner Diskrepanz

- **$\lfloor n\alpha \rfloor$ -Folge:** $(\lfloor n\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ und geeignetem Vektor α_i von unabhängigen Irrationalzahlen (Weyl'sches Kriterium).
Für $s \geq 2$ kein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}^s$ bekannt...

Folgen kleiner Diskrepanz II

- Halton-Folge in paarw. rel. primen Basen $\{p_1, \dots, p_s\}$:

$$x_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^{-k-1}, \quad \text{mit } n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^k$$

d.h. Spiegelung der Darstellung von n in Basis p_i (Koeffizienten $n_k^{(i)}$) am Komma (komponenten-weise).

- Folge in Basis 2: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \dots)$
- x_{15} in Basen (2, 3, 5): $15 = 1111_2 = 120_3 = 30_5$.

$$\begin{aligned} x_{15}^{(1)} &= 0.1111_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{15}{16} \\ x_{15}^{(2)} &= 0.021_3 = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} = \frac{7}{27} \\ x_{15}^{(3)} &= 0.03_5 = 0 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

- Sobol-Folge, Faure-Folge: digitale Netze/Folgen

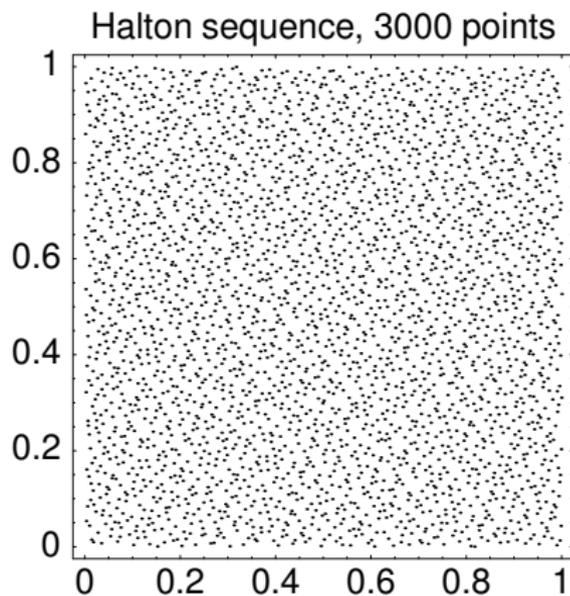
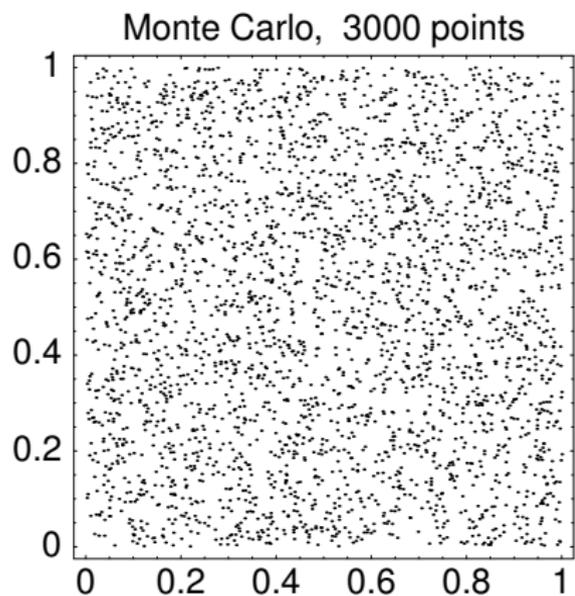
Folgen kleiner Diskrepanz III

- (t, m, s) -Netze, (t, s) -Folgen in Basis b :
Elementarintervalle $J = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i})$ mit Ganzzahlen $d_i \geq 0$, $0 \leq a_i < b^{d_i}$

(t, m, s) -**Netz**: Punktmenge von b^m Zahlen, sodass jedes Elementarintervall J mit $\lambda_s(J) = b^{t-m}$ genau b^t Punkte enthält

(t, s) -**Folge**: Teilmenge von b^m aufeinanderfolgenden Elementen ist (t, m, s) -Netz

Verallgemeinerung der Sobol-/Faure-Folgen.
Konstruktion z.B. nach Niederreiter, Xing, etc.



- Bessere Verteilungseigenschaften
- Korrelationen zwischen den einzelnen Elementen

Konvergenzverhalten MC vs. QMC: Asiatische Option im NIG-Modell

