Einführung in die Finanzmathematik: Diskrete Modelle

Skriptum zur Vorlesung (Teile Kainhofer)

Reinhold Kainhofer

FAM, TU Wien

Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Das Ein-Perioden-Modell **1**
1.1 Definitionen . . . 1
1.2 Arbitrage . . . 4
1.2.1 dominierende Handelsstrategien . . . 4
1.2.2 Lineare Preismaße . . . 5
1.2.3 Gesetz des eindeutigen Preises . . . 5
1.2.4 Arbitrage . . . 6
1.3 Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (Martingalmaß) . . . 7
1.4 Bewertung von Contingent Claims . . . 9
1.4.1 Optionen . . . 12
1.5 Vollständige Märkte . . . 12
1.5.1 Unvollständige Märkte . . . 15
1.6 Risiko und Ertrag (Return) . . . 16
1.7 Optimale Portfolios, Zulässigkeit . . . 16
1.7.1 Übungsaufgaben . . . 19

2 Wh. Wahrscheinlichkeitstheorie **21**

3 Mehr-Perioden-Modell in diskreter Zeit **22**

4 Wh. Martingaltheorie **23**

5 Capital Asset Pricing Model (CAPM) **24**

6 Das Binomialmodell **25**
6.1 Beschreibung des Modells . . . 25
6.1.1 Das Cox-Ross-Rubinstein (CRR) Modell als Spezialfall . . . 26
6.2 Arbitrage-Überlegungen . . . 27
6.3 Bepreisung im Binomialmodell . . . 28
6.4 Europäische Call-Option im Binomialmodell . . . 29
6.5 Verteilung des Maximums im Binomialmodell (Reflection Principle) . . . 30
6.5.1 Übungsaufgaben . . . 32

7 Markov Modelle **33**
7.1 Übungsaufgaben . . . 36

8 Grenzübergang im Binomialmodell: Das Black-Scholes Modell **37**
8.1 Schwache Konvergenz, zentraler Grenzwertsatz in schwacher Formulierung . . . 37
8.2 Reskalierung des Binomialmodells . . . 38
8.3 Die Black-Scholes-Formel . . . 40
8.3.1 Ableitung der Black-Scholes-Formel . . . 40

9 Amerikanische Optionen im diskreten Modell **42**
9.1 Die Snell-Envelope (Snell'sche Einhüllende) . . . 43
9.2 Zerlegung von Supermartingalen . . . 44
9.3 Anwendung auf Amerikanische Optionen . . . 46
9.4 Zusammenhang der Preise von Amerikanischen und Europäischen Optionen . . . 46

9.4.1 Übungsaufgaben 46

10 Optimale Portfolios und Martingalmethoden **47**
10.1 Übungsaufgaben 48

Stichworte zum Inhalt der Lehrveranstaltung **50**

Anhang **52**

Kapitel 1

Das Ein-Perioden-Modell

1.1 Definitionen

(Dieses Kapitel hält sich zu einem großen Teil an Kapitel 1 des Buches [Pli97])
Das Ein-Perioden-Modell ist ein simples Modell, das aber trotzdem die meisten Begriffe, Effekte und grundlegenden Gedanken der Finanzmathematik gut darstellen lässt.

Definition 1.1. *Das* <u>*Ein-Perioden-Modell*</u> *besteht aus*

1. *Start- und Endzeitpunkt* t_0 *und* t_1*, üblicherweise* $t_0 = 0$ *und* $t_1 = 1$*. Handel ist nur zu* t_0 *und* t_1 *möglich*
2. *Endlicher Ereignisraum* Ω, $|\Omega| = k < \infty$
$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$$
$\omega \in \Omega$ *beschreibt den allgemeinen Marktzustand zu* t_1
3. *Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ *mit* $\mathbb{P}(\omega_i) > 0 \forall \omega_i \in \Omega$
4. *Bankkonto-Prozess* $B = (B_t)_{t=0,1}$, $B_0 = 1$, B_1 *ist Zufallsvariable („risikolose Anlage"),* $B_1 > 0$
5. *Preisprozess* $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_t)_{t=0,1}$ *mit* $\mathbf{S}_t = \left(S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(N)}\right)$, $N < \infty$*. Es existieren* N *risikobehaftete Anlagen („Assets"),* $S_t^{(n)}$ *ist der Preis der* n*-ten Anlage zur Zeit* t*. Zu* $t = 0$ *sind die Preise* $S_0^{(n)}$ *bekannt, die Preise* $S_1^{(n)}$ *jedoch nicht-negative Zufallsvariablen* $(S_1^{(n)}(\omega))$

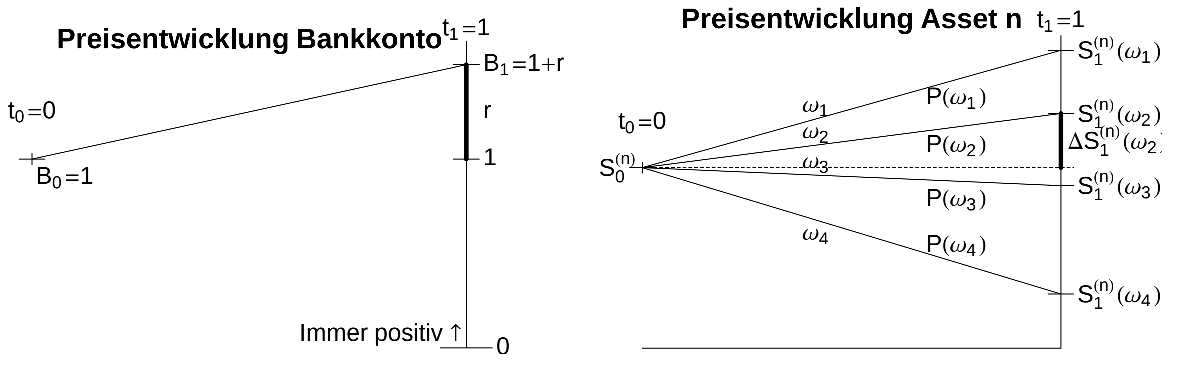


Abbildung 1.1: Entwicklung des Bankkontos und eines Assets n im Einperiodenmodell.

Bemerkung 1.1. B_t ist meist fest-verzinst gewählt, typischerweise positiv: $r = B_1 - B_0 = B_1 - 1$.

Definition 1.2 (Handelsstrategie). *Eine Handelsstrategie* $\mathbf{H} = (H_0, \ldots, H_N)$ *beschreibt ein Portfolio, das von* t_0 *bis* t_1 *gehalten wird.* $\mathbf{H}$ *ist durch die zu* $t = 0$ *bekannten Daten bestimmt (d.h. auch zu* $t = 0$ *ist* $\mathbf{H}$ *keine Zufallsvariable).* H_0 *ist der Investitionsbetrag ins risikolose Asset,* H_n *die Anzahl der Anteile an Wertpapier* n *(zum Preis* $S_t^{(n)}$*).*

Bemerkung 1.2. Alle H_i können positiv oder negativ sein[1]

Definition 1.3 (Wertprozess). *Der Wertprozess* $V = (V_t)_{t=0,1}$ *beschreibt den Wert des Portfolios* H *zu jedem Zeitpunkt:*

$$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_t^{(n)}, t = 0, 1$$

Definition 1.4 (Gewinnprozess). *Der Gewinnprozess* G *beschreibt die Wertänderung des Portfolios* H *für jeden Zeitschritt (d.h. im Ein-Perioden-Modell von* t_0 *bis* t_1*):*

$$G = H_0 \cdot r + \sum_{n=1}^{N} H_n \underbrace{\left[S_{t_1}^{(n)} - S_{t_0}^{(n)} \right]}_{\Delta S_n}$$

Bemerkung 1.3. Es gilt $V_1 = V_0 + G$, d.h. Wertänderungen geschehen nur durch Änderung der Kurse der Wertpapiere, nicht durch Kapital von außen.

Preisänderungen werden oft nur relativ zum Bankkonto betrachtet („Um wie viel ist das Wertpapier besser als das Bankkonto?“), d.h. man kann auch den Wert des Bankkontos als Geldeinheit benutzen. Dies führt zu den diskontierten Prozessen:

Definition 1.5 (diskontierte Prozesse).

- *diskontierter Preisprozess* $\widetilde{\mathbf{S}} = \left(\widetilde{S}_t \right)_{t=0,1}$ *mit*

$$\widetilde{S}_t^{(n)} = S_t^{(n)} / B_t, \quad n = 1, \ldots, N, t = 0, 1$$

- *diskontierter Wertprozess* $\widetilde{V} = \left(\widetilde{V}_t \right)_{t=0,1}$ *mit*

$$\widetilde{V}_t = V_t / B_t = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n \widetilde{S}_t^{(n)}, \quad t = 0, 1$$

- *diskontierter Gewinnprozess* $\widetilde{G} = \left(\widetilde{G}_t \right)_{t=0,1}$ *mit*

$$\widetilde{G}_t = G_t / B_t = \sum_{n=1}^{N} H_n \left[\widetilde{S}_{t_1}^{(n)} - \widetilde{S}_{t_0}^{(n)} \right], \quad t = 0, 1$$

Damit gilt auch $\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_0 + \widetilde{G}$.

[1] Das bedeutet, dass Short-selling bzw. Schulden bei der Bank zulässig sind. Short-selling ist der Verkauf von Wertpapieren, die man noch gar nicht hat. Vergleichbar ist dies mit der Aufnahme eines Kredits bei der Bank.

Beispiel 1.1. $k = 2$ Marktzustände, $N = 1$ risikobehaftetes Asset, Zins $r = \frac{1}{9}$. Die Kursentwicklung verhält sich:

$$
\begin{aligned}
&B_0 = 1 && B_1(\omega) = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} && \\
&S_0 = 5 && S_1(\omega_1) = \frac{20}{3} && S_1(\omega_2) = \frac{40}{9} \\
&\widetilde{S}_0 = 5 && \widetilde{S}_1(\omega_1) = \frac{20}{3} / \frac{10}{9} = 6 && \widetilde{S}_1(\omega_2) = \frac{40}{9} / \frac{10}{9} = 4
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich für eine Handelsstrategie $H = (H_0, H_1)$ die Werte zu $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$ sowie der Gewinn als

$$
\begin{aligned}
V_0 = \widetilde{V}_0 &= 1 \cdot H_0 + 5H_1 && \\
V_1(\omega) &= \frac{10}{9} H_0 + H_1 S_1(\omega) && \widetilde{V}_1 = H_0 + H_1 \widetilde{S}_1(\omega) \\
G(\omega) &= \frac{1}{9} H_1 + (S_1(\omega) - S_0) H_1 && \widetilde{G}(\omega) = H_1(\widetilde{S}_1(\omega) - S_0)
\end{aligned}
$$

Dies definiert uns also für jeden Marktzustand $\omega \in \Omega$ eine Gleichung.

Bemerkung 1.4. ω sind die möglichen Marktzustände zu $t = 1$. Deren tatsächliche Wahrscheinlichkeiten sind nicht näher gegeben (werden aber – wie wir später sehen werden – auch gar nicht zur Preisfestlegung eines Derivats benötigt)!

Bemerkung 1.5. Unser erstes Ziel ist nun, für eine gegebene Verpflichtung $\widetilde{V}_1(\omega_i)$ (z.B. ein abgeschlossener Vertrag oder ein sonstiges Derivat, das abhängig vom Marktzustand Leistungen bietet) eine Handelsstrategie $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)$ zu finden, die zum Zeitpunkt $t = 1$ in jedem Marktzustand ω_i genau den Wert $V_1(\omega_i)$ hat. Wenn wir nun zu $t = 0$ den Betrag V_0 in dieses Portfolio investieren, können wir exakt die nötigen Zahlungen tätigen. Insofern ist also V_0 ein fairer Preis bzw. der momentane Wert von V zum Zeitpunkt $t = 0$.

Bemerkung 1.6. Wenn man obiges Beispiel betrachtet, sieht man, dass wir für die Bestimmung von H_0 und H_1 für die beiden Assets aus den $\widetilde{V}_1$ genau zwei mögliche Zustände haben, wobei jeder Zustand ω_i eine Gleichung definiert. Insbesondere haben wir zwei Gleichungen für zwei Variablen und können i.A. ein eindeutiges derartiges Portfolio bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}_1(\omega_1) &= H_0 + H_1 S_1^{(1)}(\omega_1) \\
\widetilde{V}_1(\omega_2) &= H_0 + H_1 S_1^{(1)}(\omega_2)
\end{aligned}
$$

Die Lösung kann daher als eine Linearkombination der Portfoliowerte zu $t = 1$ dargestellt werden kann:

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \underbrace{\frac{1}{S_1^{(1)}(\omega_1) - S_1^{(1)}(\omega_2)}}_{a_{0,1}} \widetilde{V}_1(\omega_1) + \underbrace{\frac{(-1)}{S_1^{(1)}(\omega_1) - S_1^{(1)}(\omega_2)}}_{a_{0,2}} \widetilde{V}_1(\omega_2) \\
H_1 &= \underbrace{\frac{1}{S_1^{(1)}(\omega_2)} \left(1 - \frac{1}{S_1^{(1)}(\omega_1) - S_1^{(1)}(\omega_2)} \right)}_{a_{1,1}} \widetilde{V}_1(\omega_1) + \underbrace{\frac{(-1)}{(S_1^{(1)}(\omega_1) - S_1^{(1)}(\omega_2)) S_1^{(1)}(\omega_1)}}_{a_{1,2}} \widetilde{V}_1(\omega_2)
\end{aligned}
$$

Damit berechnet sich der momentane Wert dieses Portfolios, das genau $\widetilde{V}_1$ generiert, durch:

$$
\begin{aligned}
V_0 = H_0 + H_1 S_0^{(1)} &= a_{0,1} \widetilde{V}_1(\omega_1) + a_{0,1} \widetilde{V}_1(\omega_2) + S_0^{(1)} a_{1,1} \widetilde{V}_1(\omega_1) + S_0^{(1)} a_{1,2} \widetilde{V}_1(\omega_2) \\
&= \underbrace{\left(a_{0,1} + S_0^{(1)} a_{1,1} \right)}_{=:q_1} \widetilde{V}_1(\omega_1) + \underbrace{\left(a_{1,1} + S_0^{(1)} a_{1,2} \right)}_{=:q_2} \widetilde{V}_1(\omega_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}]
\end{aligned}
$$

Naïv würde man erwarten, dass der faire Preis einfach $\mathbb{E}[\widetilde{V}]$ beträgt, wobei die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten für die Marktzustände ω_i benutzt werden. Obige Gleichung zeigt allerdings, dass der

momentane Preis zwar auch als Erwartungswert der diskontierten Preise zu $t = 1$ bestimmt werden kann, allerdings bezüglich einer anderen Wahrscheinlichkeitsverteilung, die lediglich von den Kursen der am Markt verfügbaren Assets $S_t^{(n)}$ für $t = 0, 1$ abhängen, nicht aber von den Wahrscheinlichkeiten der Marktzustände!
Die grundlegende Idee der Finanzmathematik ist jene, dass ein gegebener Claim durch geeignete Kombinationen von vorhandenen Assets dargestellt werden kann – die replizierende Handelsstrategie – und dadurch der Preis bereits bestimmt ist. Damit ist in jedem Fall genau das nötige Kapital zu $t = 1$ vorhanden und es besteht kein Risiko, unabhängig davon, ob und mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Marktzustand angenommen wird. Daher wird dieses durch den Markt (und durch die Annahme, dass keine risikolosen Gewinne möglich sein sollen) bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß auch „risikoneutrales Maß‘ genannt. Mehr dazu jedoch später.

Beispiel 1.2. Betrachte nun den Markt aus Beispiel 1.1 mit $k = 3$ Zuständen, wobei im zusätzlichen Zustand der Preisverlauf $S_1(\omega_3) = 30/9$ und $\widetilde{S}_1(\omega_3) = 3$ lautet. Alle Definitionen und Gleichungen sind gleich wir oben, lediglich eine neue dritte Gleichung für ω_3 kommt hinzu:

$$\begin{aligned} \omega_3 : V_1(\omega_3) &= \frac{10}{9}H_0 + \frac{30}{9}H_1 & \qquad \widetilde{V}_1(\omega_3) &= H_0 + 3H_1 \\ G(\omega_3) &= \frac{1}{9}H_0 - \frac{5}{3}H_1 & \qquad \widetilde{G}(\omega_3) &= H_0 - 2H_1 \end{aligned}$$

Damit haben wir 3 Gleichungen (von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) für 2 Variablen (H_0, H_1) bei vorgegebenem G oder $\widetilde{G}$.

Übungsbeispiel 1.1. $N = 2$ risikobehaftete Assets, $k = 3$ Zustände. Stelle Gleichungen für V, $\widetilde{V}$, G und $\widetilde{G}$ auf!

1.2 Arbitrage

Idee. Der Markt soll keine Gelegenheit für einen risikolosen Gewinn bieten.

1.2.1 dominierende Handelsstrategien

Definition 1.6. *Eine Handelsstrategie $\widehat{H}$ ist dominierend, wenn es eine Handelsstrategie $\bar{H}$ gibt mit $\widehat{V}_0 = \bar{V}_0$, aber $\widehat{V}_1(\omega) > \bar{V}_1(\omega) \forall \omega \in \Omega$.*

Lemma 1.1. *Eine dominierende Handelsstrategie existiert dann und nur dann, wenn eine Handelsstrategie H existiert mit $V_0 = 0$ und $V_1(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$.*

Beweis. $\Longrightarrow$ Sei $\widehat{H}$ dominierend. Die Handelsstrategie $H = \widehat{H} - \bar{H}$ erfüllt $V_0 = 0$ und $V_1(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$.

$\Longleftarrow$ Die HS H dominiert die HS $\bar{H} = (0, 0)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Lemma 1.2. *Eine dominierende Handelsstrategie existiert dann und nur dann, wenn eine Handelsstrategie existiert mit $V_0 < 0$ und $V_1(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$.*

Beweisskizze. Betrachte die Handelsstrategie H, die das vorige Lemma erfüllt. Konstruiere eine neue Handelsstrategie $\bar{H}_n = H_n$, $n = 1, \ldots, N$ und $\bar{H}_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_0^{(n)} - \delta$ mit $\delta = \min_\omega \widetilde{G}(\omega) > 0$. Diese erfüllt die Behauptung des Lemmas. Für die andere Richtung verschiebt man H_0 um V_0 und hat damit die dominierende Handelsstrategie.

Interpretation. Zwei Investitionen (Portfolios) haben denselben Anfangspreis V_0, die eine hat aber in jedem Fall einen höheren Endwert. Damit könnte man einen Anteil des niedrigeren Portfolios verkaufen und das Kapital in das bessere Portfolio investieren. In jedem Fall bleibt ein risikoloser Gewinn übrig.

1.2.2 Lineare Preismaße

Definition 1.7 (lineares Preismaß). *Ein lineares Preismaß ist ein nicht-negativer Vektor* $\pi = (\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \ldots, \pi(\omega_N))$ *mit*

$$\widetilde{V}_0 = \mathbb{E}_\pi[\widetilde{V}_1] = \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega)\widetilde{V}_1(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega)\frac{V_1(\omega)}{B_1(\omega)} \quad \forall \textit{Handelsstrategien}$$

Korollar 1.3. *Wenn ein lineares Preismaß existiert, gibt es keine dominierende Handelsstrategie.*

Beweis. Angenommen, es existiert eine dominierende Handelsstrategie $\widehat{H}$, d.h. $\widehat{V}_0 = \bar{V}_0$ und $\widehat{V}_1(\omega) > \bar{V}_1(\omega) \forall \omega \in \Omega$, woraus $\widetilde{\widehat{V}}_1(\omega) > \widetilde{\bar{V}}_1(\omega)$ folgt. Damit erhalten wir den Widerspruch

$$\widetilde{\widehat{V}}_0 = \sum_\omega \pi(\omega)\widetilde{\widehat{V}}_1(\omega) > \sum_\omega \pi(\omega)\widetilde{\bar{V}}_1(\omega) = \widetilde{\bar{V}}_0 = \widetilde{\widehat{V}}_0 .$$

Die strikte Ungleichung im Beweis gilt allerdings nur, da wir an eine dominierende Handelsstrategie die relativ starke Forderung gestellt haben, dass sie in jedem Marktzustand strikt mehr als die dominierte Handelsstrategie liefert. Der Fall, dass $\pi = (0, 0, \ldots, 0)$ gilt, ist trivial, da dann nach Definition immer $V_0 = 0$ gelten würde und zum anderen gar nicht möglich, wenn man z.B. die Handelsstrategie $H = (H_0 > 0, 0, \ldots, 0)$ betrachtet, die nur in das risikolose Asset investiert.

Bemerkung 1.7. π ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis. Dies ist einfach zu sehen, indem man ein Portfolio $H = (1, 0, \ldots, 0)$ mit $H_0 \neq 0$ betrachtet, welches zu t_0 den Wert $V_0 = 1$ und unabhängig vom Marktzustand zu $t = 1$ immer den Wert $\widetilde{V}_1(\omega) = 1$ hat. Damit folgt

$$1 = \widetilde{V}_0 = \sum_\omega \pi(\omega) \cdot 1 = \sum_\omega \pi(\omega)$$

Zusammen mit der Nicht-Negativität folgt die Behauptung.

Lemma 1.4. *Ein Vektor* π *ist ein lineares Preismaß dann und nur dann, wenn* π *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* Ω *ist mit* $\widetilde{S}_0^{(n)} = \mathbb{E}_\pi[\widetilde{S}_1^{(n)}] = \sum_\omega \pi(\omega)\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega)$ *für* $n = 1, \ldots, N$.

Es genügt also, dass (1.7) nur für alle N Assets erfüllt ist, um zu garantieren, dass die Gleichung für jedes beliebige Portfolio erfüllt ist. Dies ist relativ klar, da ein beliebiges Portfolio als Vektor betrachtet ja nur eine Linearkombination der Portfolios $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ist, die jeweils nur das i-te Asset beschreiben.

Interpretation (Definition des linearen Preismaßes). Der Wert $\widetilde{V}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ entspricht genau dem Erwartungswert des Preises zu $t = 1$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß π. Das heißt, wir benutzen nicht die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten, sondern andere, die risikolosen Gewinn ausschließen.

1.2.3 Gesetz des eindeutigen Preises

Definition 1.8. *Das Gesetz des eindeutigen Preises gilt, wenn es keine zwei Handelsstrategien $\widehat{H}$ und $\bar{H}$ gibt, sodass $\widehat{V}_1(\omega) = \bar{V}_1(\omega) \forall \omega \in \Omega$ gilt, aber $\widehat{V}_0 \neq \bar{V}_0$.*

Anschaulich bedeutet dies, dass zwei Anlagen / Portfolios, die zu $t = 1$ in jedem Zustand dasselbe auszahlen, auch gleich viel Wert sein sollen zum Zeitpunkt $t = 0$.

Bemerkung 1.8. Wenn es keine zwei verschiedenen Handelsstrategien gibt, die dieselben Auszahlungen leisten (etwa weil die durch $\widetilde{V}_1(\omega_i)$ bestimmte Handelsstrategie immer eindeutig ist wie im Beispiel 1.1), ist das Gesetz des eindeutigen Preises trivialerweise automatisch erfüllt!

Lemma 1.5. *Wenn keine dominierenden Handelsstrategien existieren, gilt das Gesetz des eindeutigen Preises. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.*

Beispiel 1.3 (Gesetz des eindeutigen Preises nicht erfüllt). Betrachte einen Markt mit $k = 2$ Zuständen und $N = 1$ risikobehaftetem Asset, sowie $r = 1$. Es sei

$$S_0 = 10 \qquad\qquad S_1(\omega_1) = S_1(\omega_1) = 12$$

In diesem Fall ist S_1 und damit auch $V_1(\omega) = 2H_0 + 12H_1$ konstant auf Ω, also quasi risikolos.
$\Rightarrow$ beliebig viele HS (H_0, H_1), um $V_1 = \lambda$ (λ fix gewählt) zu erzeugen, jede hat unterschieden Preis V_0.
$\Rightarrow$ kein eindeutiger Preis

Beispiel 1.4 (Gesetz des eindeutigen Preises, aber dominierende Handelsstrategie existiert).
Betrachte einen Markt mit $k = 2$ Zuständen und $N = 1$ risikobehaftetem Asset, sowie $r = 1$. Es sei

$$S_0 = 10 \qquad\qquad S_1(\omega_1) = 12 \qquad\qquad S_1(\omega_1) = 8$$

Das GS für die HS H lautet

$$\begin{aligned} V_1(\omega_1) &= 2H_0 + 12H_1 \\ V_1(\omega_2) &= 2H_0 + 8H_1 \end{aligned}$$

und besitzt eine eindeutige Lösung für jedes $X = (V_1(\omega_1), V_1(\omega_2))$. Damit ist die Handelsstrategie H eindeutig und auch der Preis V_0 eindeutig.
Betrachte nun allerdings die Handelsstrategie $H = (10, -1)$, also 10 Geldeinheiten am Bankkonto, ein Asset short:

$$\begin{aligned} V_0 &= 10 \cdot 1 - 1 \cdot 10 = 0 \\ V_1(\omega_1) &= 2 \cdot 10 - 12 \cdot 1 = 8 \\ V_1(\omega_2) &= 2 \cdot 10 - 8 \cdot 1 = 12 \end{aligned}$$

Damit gilt für die HS $H = (10, -1)$, dass $V_0 = 0$, aber $V_1(\omega) > 0 \forall \omega$. Damit dominiert H die Handelsstrategie $(0, 0)$ und der Markt lässt dominierende Handelsstrategien zu.

1.2.4 Arbitrage

Definition 1.9. *Eine Arbitrage-Möglichkeit ist eine Handelsstrategie H mit*

- $V_0 = 0$
- $V_1(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$
- $\exists \omega \in \Omega : V_1(\omega) > 0$ *(oder alternativ $\mathbb{E}[V_1] > 0$, da $\pi(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$)*

Definition 1.10 (Alternative Definition von Arbitrage). *Eine Arbitrage-Möglichkeit ist eine Handelsstrategie H, sodass eine weitere Handelsstrategie $\widehat{H}$ existiert mit*

- $V_0 = \widehat{V}_0$
- $V_1(\omega) \geq \widehat{V}_1(\omega) \forall \omega \in \Omega$
- $\exists \omega \in \Omega : V_1(\omega) > \widehat{V}_1(\omega)$ *(oder alternativ* $\mathbb{E}[V_1] > \mathbb{E}[\widehat{V}_1]$*, da* $\pi(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$*)*

Bemerkung 1.9. Die Existenz von Arbitrage ist nach beiden Definitionen äquivalent, da Definition 1.9 nur der Spezialfall $\widehat{H} = 0$ von Definition 1.10 ist, und andererseits die HS $H - \widehat{H}$ die Bedingungen von Definition 1.9 erfüllt. Wenn es also eine Arbitrage-Möglichkeit im Sinn von Definition 1.9 gibt, dann auch im Sinn von Definition 1.10 und umgekehrt.

Interpretation. Arbitrage bedeutet einen risikolosen Gewinn. Insbesondere besteht ohne Kapitel ($V_0 = 0$) eine Chance auf einen Gewinn in zumindest einem möglichen Marktzustand, aber es ist kein Verlust möglich. In eine derartige Investitionsmöglichkeit würden alle am Markt (beliebig viel, da kein Kapital nötig ist) investieren. Daher ist die Nicht-Existenz der Möglichkeit eines risikolosen Gewinnes das Grundprinzip der Finanzmathematik. Außerdem würde aufgrund der starken Nachfrage nach den Marktprinzipien der Preis steigen und die Arbitrage doch wieder verschwinden.

Lemma 1.6. *Wenn es eine dominierende Handelsstrategie gibt, existiert eine Arbitrage-Möglichkeit. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis. Die Handelsstrategie $\bar{H}$ dominiere $\widehat{H}$. Dann erfüllt $H = \bar{H} - \widehat{H}$ alle Bedingungen für eine Arbitrage-Möglichkeit.

Beispiel 1.5 (Arbitrage, aber keine dominierende Handelsstrategie). $k = 2$ Zustände, $N = 1$ risikobehaftetes Asset, $r = 0$, $S_0 = 10$, $S_1(\omega_1) = 12$, $S_1(\omega_2) = 10$.

- $H = (-10, 1)$ ist eine Arbitrage-Möglichkeit, weil $V_0 = -10 + 1 \cdot 10 = 0$, aber $V_1(\omega_1) = -10 + 12 = 2$ und $V_1(\omega_2) = -10 + 10 = 0$.
- $\pi = (0, 1)$ ist ein lineares Preismaß, daher existiert keine dominierende Handelsstrategie.

Bemerkung 1.10. Der Zustand ω_2, der im letzten Beispiel die Arbitrage liefert, wird durch $\pi(\omega_2) = 0$ wieder kompensiert und wirkt sich daher nicht auf V_0 aus.

Korollar 1.7. *H ist eine Arbitrage-Möglichkeit dann und nur dann, wenn (a)* $\widetilde{G} \geq 0$*, (b)* $\mathbb{E}[\widetilde{G}] > 0$ *und (c)* $V_0 = 0$.

Beweis. Simples Übungsbeispiel.

1.3 Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (Martingalmaß)

Frage. Wann gibt es keine Arbitrage-Möglichkeit?

Wie wir in Beispiel 1.5 gesehen haben, verhindert die Existenz eines linearen Preismaßes zwar die Existenz von dominierenden Handelsstrategien, nicht jedoch die Existenz von Arbitrage. Die Analyse des Beispiels zeigte uns, dass $\pi(\omega_2) = 0$ zur Folge hatte, dass der Arbitrage erlaubende Zustand ω_2 sich nicht auf die Martingaleigenschaft auswirkt. Um diesen Fall also zu verhindern, werden wir nun zusätzlich fordern, dass jeder Zustand wirklich positive Wahrscheinlichkeit besitzt.

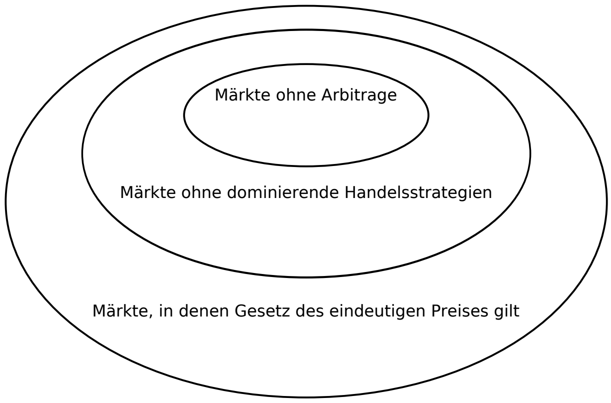


Abbildung 1.2: Klassifikation und Hierarchie von Marktmodellen

Definition 1.11. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf Ω heißt risikoneutrales Maß (RNM), wenn*

(a) $\mathbb{Q}(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$

(b) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta S^{(n)}] = 0$ *(bzw.* $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^{(n)}] = S_0^{(n)}$*) für* $n = 1, \ldots, N$ *(„Martingaleigenschaft“)*

Interpretation. Der momentane Preis $S_0^{(n)}$ ist – wie auch schon bei linearen Preismaßen – der beste (Momenten-)Schätzer für den Preis zu $t = 1$. Außerdem hat ein risikoneutrales Maß dieselben Nullmengen (nämlich keine in unserem Fall) wie die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten, d.h. $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Die entscheidende Eigenschaft ist, dass $\mathbb{Q}(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$ bzw. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Theorem 1.8. *Es existiert keine Arbitrage-Möglichkeit dann und nur dann, wenn ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$ existiert.*

Der Beweis dieses Satzes läuft z.B. über lineare Programmierung, würde aber den Rahmen hier sprengen.

Bemerkung 1.11. Ein risikoneutrales Maß ist i.A. nicht eindeutig, wichtig ist nur die Existenz mindestens eines RNM. Ist das RNM eindeutig, ist der Markt vollständig und jeder beliebige Claim kann durch ein Portfolio erreicht werden, wie später gezeigt werden wird.

Beispiel 1.6 (Fs. von Beispiel 1.1; eindeutiges RNM). $S_0 = 5$, $\widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_1) = 6$, $\widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_2) = 4$. Das RNM $\mathbb{Q}$ wird definiert durch die Martingalbedingung einerseits und die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Das entsprechende Gleichungssystem lautet also

$$\begin{aligned} 5 &= 6\mathbb{Q}(\omega_1) + 4\mathbb{Q}(\omega_2) \\ 1 &= \mathbb{Q}(\omega_1) + \mathbb{Q}(\omega_2) \end{aligned}$$

Dessen Lösung ist $\mathbb{Q}(\omega_1) = \mathbb{Q}(\omega_2) = \frac{1}{2}$, wodurch $\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ein RNM ist und daher keine Arbitrage in diesem einfachen Markt möglich ist.

Beispiel 1.7 (Fs. von Beispiel 1.2; RNM nicht eindeutig). Der Markt besteht wie im letzten Beispiel aus einem Asset, jedoch wird noch ein dritter Marktzustand ω_3 beobachtet mit $\widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_3) = 3$. Das Gleichungssystem lautet nun

$$\begin{aligned} 5 &= 6\mathbb{Q}(\omega_1) + 4\mathbb{Q}(\omega_2) + 3\mathbb{Q}(\omega_3) \\ 1 &= \mathbb{Q}(\omega_1) + \mathbb{Q}(\omega_2) + \mathbb{Q}(\omega_3) \end{aligned}$$

Dessen Lösung ist $\mathbb{Q}(\omega_2) = 2-3\mathbb{Q}(\omega_1)$ und $\mathbb{Q}(\omega_3) = -1+2\mathbb{Q}(\omega_1)$. Damit ist also $\mathbb{Q} = (\lambda, 2-3\lambda, -1+2\lambda)$ für jedes $\lambda \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ ein RNM (Die Werte $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = \frac{2}{3}$ müssen ausgeschlossen werden, da sonst $\mathbb{Q}(\omega_2) = 0$ oder $\mathbb{Q}(\omega_3) = 0$ gilt und $\mathbb{Q}$ dann kein RNM mehr ist!). Damit haben wir ein (nicht eindeutiges) RNM gefunden und der Markt lässt keine Arbitrage zu.

Beispiel 1.8 (kein RNM, obwohl $N = 2$ und $k = 3$ und LPM). Betrachte einen Markt mit $N = 2$ risikobehafteten Assets und $k = 3$ Marktzuständen, sowie einen Zins von $r = \frac{1}{9}$. Die Kurse entwickeln sich nach folgender Tabelle:

	$S_0^{(n)} = \widetilde{S}_0^{(n)}$	$S_1^{(n)}$			$\widetilde{S}_1^{(n)}$		
n		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	5	20/3	20/3	40/9	6	6	4
2	10	40/3	80/9	80/9	12	8	8

Das Gleichungssystem für ein risikoneutrales Maß lautet also

$$\begin{aligned} 5 &= 6\mathbb{Q}(\omega_1) + 6\mathbb{Q}(\omega_2) + 4\mathbb{Q}(\omega_3) \\ 10 &= 12\mathbb{Q}(\omega_1) + 8\mathbb{Q}(\omega_2) + 8\mathbb{Q}(\omega_3) \\ 1 &= \mathbb{Q}(\omega_1) + \mathbb{Q}(\omega_2) + \mathbb{Q}(\omega_3) \end{aligned}$$

und besitzt die Lösung $\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Dies ist zwar ein lineares Preismaß, aber nicht echt positiv, also kein risikoneutrales Maß. Damit ist in diesem Markt Arbitrage möglich, z.B. durch $H = (0, 2, -1)$ im Zustand ω_2.

Beispiel 1.9 (kein RNM, kein LPM). Der Markt sei wie im letzten Beispiel 1.8, jedoch soll der Zustand ω_3 nicht existieren. Das GS ist damit

$$\begin{aligned} 5 &= 6\mathbb{Q}(\omega_1) + 6\mathbb{Q}(\omega_2) \\ 10 &= 12\mathbb{Q}(\omega_1) + 8\mathbb{Q}(\omega_2) \\ 1 &= \mathbb{Q}(\omega_1) + \mathbb{Q}(\omega_2) \end{aligned}$$

Damit haben wir drei (nicht linear abhängige) Gleichungen für 2 Variablen, weshalb keine Lösung existiert. Damit gibt es kein RNM in diesem Markt und es ist Arbitrage möglich. Es gibt nicht mal ein LPM, da auch dieses obiges Gleichungssystem erfüllen müsste!

1.4 Bewertung von Contingent Claims

Definition 1.12 (Contingent Claim). *Ein Contingent Claim (CC, „bedingte Forderung“) X ist eine Zahlung zu $t_1 = 1$, deren Höhe vom Marktzustand ω_i abhängt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet ist X eine Zufallsvariable.*

Definition 1.13 (erreichbarer CC). *Ein CC ist erreichbar (attainable, marketable), wenn eine Handelsstrategie H existiert (das „replizierende Portfolio“) mit $V_1(\omega_i) = X(\omega_i) \forall \omega_i \in \Omega$. Man sagt dann, dass H den CC X erzeugt.*

Beispiel 1.10. Betrachte einen Markt mit $N = 2$ Assets und $k = 3$ Zuständen sowie einen Zins von $r = 0$. Die Preisentwicklung sei

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}_0^{(1)} = 5 \qquad && \widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_1) = 3 \qquad && \widetilde{S}_0^{(2)} = 5 \qquad && \widetilde{S}_1^{(2)}(\omega_1) = 7 \\ & && \widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_2) = 5 && && \widetilde{S}_1^{(2)}(\omega_2) = 5 \\ & && \widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_3) = 7 && && \widetilde{S}_1^{(2)}(\omega_3) = 3 \end{aligned}$$

Betrachte nun einen CC $X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = 5$. Gesucht ist damit die Handelsstrategie $H = (H_0, H_1, H_2)$ mit

$$\begin{aligned} 5 =& H_0B_0+H_1\widetilde{S}_1^{(1)}(\omega_1)+H_2\widetilde{S}_1^{(2)}(\omega_1) =1H_0+3H_1+7H_2 \\ 5 =& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =1H_0+5H_1+5H_2 \\ 5 =& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =1H_0+7H_1+3H_2 \end{aligned}$$

Die Lösung ist $H_0 = 5 - 10H_2$ und $H_1 = H_2$, insbesondere also $H = (5 - 10\lambda, \lambda, \lambda)$. Mögliche Portfolios zur Replizierung sind z.B. $H = (5, 0, 0)$ (nur Investition ins Bankkonto) oder $H = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (nur in risikobehaftete Assets). Das replizierende Portfolio ist also i.A. nicht eindeutig (der Preis jedoch schon, auch in diesem Fall!)

Beispiel 1.11. Ändere im letzten Beispiel nun $\widetilde{S}_1^{(2)}(\omega_3) = 5$ und $\widetilde{X}(\omega_3) = 7$. Das GS lautet nun

$$\begin{aligned} \omega_1 :\quad 5 =& 5H_0+3H_1+7H_2 \\ \omega_2 :\quad 5 =& 5H_0+5H_1+5H_2 \\ \omega_3 :\quad 7 =& 5H_0+7H_1+5H_2 \end{aligned}$$

und besitzt die Lösung $H_0 = -1$, $H_1 = H_2 = 1$. Die Handelsstrategie $H = (-1, 1, 1)$ ist insbesondere in diesem Fall eindeutig, da die Koeffizientenmatrix vollen Rang besitzt.

Frage. Was ist der (faire) Preis p eines erreichbaren CC X zum Zeitpunkt $t = 0$?

Man sieht leicht, dass es eine Arbitrage-Möglichkeit gibt, wenn $p \neq V_0$ gilt:

$p > V_0$: Verkaufe einen Claim zum Zeitpunkt $t_0 =$ um p, investiere V_0 ins replizierende Portfolio, welches genau die nötige Auszahlung abdeckt. Die Differenz $p - V_0$ kann als risikoloser Gewinn eingestreift werden.

$p < V_0$: Verfahre genau umgekehrt (Investiere in Claim und gehe einmal das replizierende Portfolio short).

Wenn $p = V_0$, existiert keine Arbitrage mit der replizierenden Handelsstrategie H. Die Frage ist jedoch, ob eine solche replizierende Handelsstrategie überhaupt existiert. Mehr dazu im Abschnitt 1.5.

Lemma 1.9. *Sei $\mathbb{Q}$ ein risikoneutrales Maß. Dann gilt für jede Handelsstrategie H:*

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1]$$

Beweis. $V_0 \overset{\text{Def. } G}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1 - \widetilde{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{n=1}^N H_n\Delta\widetilde{S}_n\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1] - \sum_{n=1}^N H_n \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta\widetilde{S}_n]}_{=0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1]$

Das Gesetz des eindeutigen Preises ist also für alle Claims sicher erfüllt, für die eine replizierende Handelsstrategie existiert. Mit anderen Worten: Jede Handelsstrategie, die den Claim erzeugt, hat denselben Preis, vorausgesetzt es existiert ein risikoneutrales Maß.

Bemerkung 1.12. Aus $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1]$ folgt nun die Arbitrage-Freiheit: Wenn es nun einen Zustand $\omega \in \Omega$ gibt mit $\widetilde{V}_1(\omega) > V_0$, dann muss es auch einen Zustand $\bar{\omega} \in \Omega$ geben, sodass $\widetilde{V}_1(\bar{\omega}) < V_0$. Wenn also die Möglichkeit auf einen Gewinn besteht, muss es ebenso die Möglichkeit eines Verlustes geben.

Lemma 1.10. *Wenn das Gesetz des eindeutigen Preises erfüllt ist, dann ist der faire Preis des Contingent Claims X mit replizierendem Portfolio H zum Zeitpunkt $t = 0$ genau der Wert des replizierenden Portfolios zu $t = 0$:*

$$V_0 = H_0B_0 + \sum_{n=1}^N H_nS_0^{(n)}$$

Theorem 1.11 (Risikoneutrales Bewertungsprinzip). *Ist das Ein-Perioden-Modell arbitragefrei, dann ist der Wert eines Contingent Claims X zu $t = 0$ gegeben durch $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1]$, wobei $\mathbb{Q}$ ein beliebiges risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß ist.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 1.9.

Beispiel 1.12 (von früher). Es sei $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}$, $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. Also $\widetilde{S}_1(\omega_1) = 6$ und $\widetilde{S}_1(\omega_4) = 4$. Als risikoneutrales Maß haben wir bereits $\mathbb{Q}(\omega_1) = \mathbb{Q}(\omega_2) = \frac{1}{2}$ bestimmt.
Betrachte einen Claim X mit $X(\omega_1) = 7$ und $X(\omega_2) = 2$. Nach obigem Theorem ist der Preis dieses Claims

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{X}{B_1}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\frac{10}{9}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\frac{10}{9}} = \frac{81}{20} = 4.05$$

Die replizierende Handelsstrategie H bestimmt sich folgendermaßen, indem $\widetilde{V}_1 = V_0 + \widetilde{G}$ benutzt wird:

$$X(\omega_i)/B_1(\omega_i) = \widetilde{V}_1(\omega_i) = V_0 + \widetilde{G}(\omega_i) = 4.05 + H_1 \Delta \widetilde{S}_1(\omega_i) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Wir haben also 2 Gleichungen, die beide denselben Wert für H_1 liefern:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &: 7 \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{20} + H_1 \cdot 1 & &\Rightarrow H_1 = \frac{45}{20} = 2.25 \\
\omega_2 &: 2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{20} + H_1 \cdot (-1) & &\Rightarrow H_1 = \frac{81}{20} - \frac{36}{20} = \frac{45}{20} = 2.25
\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass beide Gleichungen denselben Wert für H_1 liefern ist nicht weiter verwunderlich, immerhin wurde V_0 so bestimmt. Insofern war die Benutzung der zweiten Gleichung nur als Kontrolle notwendig. H_0 ergibt sich nun als

$$4.05 = V_0 = H_0 + H_1 S_0 = H_0 + 2.25 \cdot 5 \quad \Rightarrow H_0 = \frac{81}{20} - \frac{225}{20} = \frac{-144}{20} = -7.2$$

Der Claim X ist also durch die Handelsstrategie $H = (-7.2, 2.25)$ erreichbar.
Als Kontrolle können wir den Wert dieser Handelsstrategie zu $t = 0$ und zu $t = 1$ berechnen:

$$\begin{aligned}
t = 0: & & V_0 &= -7.2 + 2.25 \cdot 5 = 4.05 \\
t = 1: & \ \omega_1: & V_1(\omega_1) &= -7.2 \cdot \frac{10}{9} + 2.25 \cdot \frac{20}{3} = 7 \\
& \ \omega_2: & V_1(\omega_2) &= -7.2 \cdot \frac{10}{9} + 2.25 \cdot \frac{40}{9} = 2
\end{aligned}$$

Der faire Preis dieses Claims X muss nun nach obigem Theorem genau V_0 sein, ansonsten wäre ein risikoloser Gewinn möglich.

Definition 1.14 (Zustands Claim, Zustandspreis). *Für $\widehat{\omega} \in \Omega$ wird der Contingent Claim X, der nur im Zustand $\widehat{\omega}$ genau 1 Geldeinheit auszahlt, in allen anderen Zuständen jedoch nichts, also*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = \widehat{\omega} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

als „Elementar-Claim" bzw. „Zustands-Claim" des Zustandes $\widehat{\omega}$ bezeichnet. Sein Preis (wenn er erreichbar ist) ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{Q}(\omega) X(\omega)/B_1(\omega) = \mathbb{Q}(\widehat{\omega})/B_1(\widehat{\omega})$$

und wird als Zustandspreis für $\widehat{\omega} \in \Omega$ bezeichnet.

Der Preis V_0 jedes Contingent Claims kann als Linearkombination der Payoffs $X(\omega)$ mit den Zustandspreisen als Gewichten dargestellt werden (da die Zustandspreise genau die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten beinhalten).

1.4.1 Optionen

- **Call-Optionen**: Eine Call-Option gibt dem Käufer das Recht (aber nicht die Pflicht), das Asset zum festgelegten Preis K zum Zeitpunkt t_1 zu kaufen. Ist der Aktienkurs höher, wird er dies tun, das Asset sofort wieder verkaufen und die Differenz als Gewinn einstreifen, ansonsten wird er die Option nicht ausüben und sie ist wertlos. Der Payoff ist also für $N = 1$ genau $X(\omega) = (S_1(\omega) - K)^+ = \max(0, S_1(\omega) - K)$ für gegebene Konstante K (Ausübungspreis, „exercise price“, „strike price“), teilweise auch mit e bezeichnet.

  Wenn X erreichbar ist, gilt

  $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1] = \sum_{\omega\in\Omega'} \mathbb{Q}(\omega)[S_1(\omega) - K]/B_1(\omega)$$

  wobei $\Omega' = \{\omega \in \Omega : S_1(\omega) \geq K\}$ nur jene Zustände beinhaltet, in denen die Option einen Gewinn abwirft.

  Beispiel 1.13. Betrachte eine Option auf das Asset von Beispiel 1.1: $r = \frac{1}{9}$, $K = 5$.

  Der Payoff ist also $X(\omega) = \begin{cases} 5/3, & \omega = \omega_1 \\ 0, & \omega = \omega_2 \end{cases}$ und damit gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{4} = 0.75$ für den Wert der Option, falls sie erreichbar ist.

  Ist X nun durch ein Portfolio erreichbar? Die Handelsstrategie wird wieder bestimmt durch $X(\omega) = V_1(\omega) = H_1B_1 + H_1S_1(\omega)$, wobei die Lösung genau $H_0 = -3$ und $H_1 = 0.75$ beträgt. $H = (-3, 0.75)$ erzeugt also X und daher ist X erreichbar und man kann das Kapital von 0.75 so investieren, dass in jedem Zustand exakt das nötige Kapital zur Verfügung steht.

- **Put-Option**: : Eine Put-Option gibt dem Käufer das Recht (aber nicht die Pflicht), das Asset zum festgelegten Preis K zum Zeitpunkt t_1 zu verkaufen. Ist der Aktienkurs niedriger als K, wird er dies tun, die nötige Aktie am Markt um den billigeren Aktienkurs kaufen und die Differenz als Gewinn einstreifen, ansonsten wird er die Option nicht ausüben und sie ist wertlos. Der Payoff ist also für $N = 1$ genau $X(\omega) = (K - S_1(\omega))^+ = \max(0, K - S_1(\omega))$ für gegebene Konstante K. Die Put-Option kann exakt gleich behandelt werden wie die Call-Option.

Beispiel 1.14 (Fortsetzung von Beispiel 1.2; nicht jeder Claim ist erzeugbar). Betrachte einen allgemeinen CC mit $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$. Existiert hierfür immer eine Handelsstrategie, die diesen Claim erzeugt? Dafür haben wir ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen, je eine pro Zustand ω_i:

$$\omega_i : H_0B_1(\omega_i) + H_1S_1^{(1)}(\omega_i) = X(\omega_i) = X_i$$

Dieses Gleichungssystem aus drei Gleichungen für zwei Variablen hat i.A. keine Lösung. Eine Lösung existiert insbesondere nur dann, wenn die Gleichungen linear abhängig sind, was der Fall ist für $X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0$. Derartige Claims sind erreichbar, alle anderen sind nicht erreichbar. Insbesondere heißt dies, dass nicht jeder Claim erreichbar ist in diesem Modell (wo wir mehr als ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß haben).

Bisher hatten wir immer vorausgesetzt, dass eine replizierende Handelsstrategie existiert, damit wir den Preis festlegen können.

1.5 Vollständige Märkte

Wenn ein risikoneutrales Maß existiert (was gleichbedeutend ist mit der Absenz von Arbitrage), können wir den Preis V_0 eines CC bestimmen als Erwartungswert bezüglich eines risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$. Wenn ein Claim erreichbar ist, so muss insbesondere für jede replizierende Handelsstrategie derselbe Preis herauskommen, also alle Erwartungswerte bezüglich aller risikoneutralen Maße übereinstimmen. Die Frage ist nun, wann ein CC überhaupt erreichbar ist, bzw. in welchen Fällen es ohnehin nur ein eindeutiges risikoneutrales Maß gibt.

Definition 1.15 (Vollständigkeit von Märkten). *Ein Markt ist vollständig, wenn jeder CC erreichbar ist durch eine Handelsstrategie. Sonst heißt er unvollständig.*

Sei X nun ein Contingent Claim in einem Marktmodell mit N Assets und k Zuständen in Ω. Das Problem der Bestimmung einer replizierenden Handelsstrategie H ist ein lineares Gleichungssystem $X = A \cdot H$ mit

$$A = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1^{(1)}(\omega_1) & S_1^{(2)}(\omega_1) & \dots & S_1^{(N)}(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1^{(1)}(\omega_2) & S_1^{(2)}(\omega_2) & \dots & S_1^{(N)}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_k) & S_1^{(1)}(\omega_k) & S_1^{(k)}(\omega_k) & \dots & S_1^{(N)}(\omega_k) \end{pmatrix}.$$

Der Contingent Claim X ist erreichbar, wenn $X = A \cdot H$ zumindest eine Lösung besitzt. Der Markt ist vollständig, wenn $X = A \cdot H$ für jedes X eine Lösung besitzt, wozu $\tilde{k} \leq N$ nötig ist mit $\tilde{k} \leq k$ der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von A. Andererseits ist das Modell nur dann arbitragefrei, wenn $\tilde{k} \geq N$. Folgendes Lemma ist also aus dieser Argumentation heraus sofort ersichtlich.

Lemma 1.12. *Ist das Marktmodell arbitragefrei, so ist es genau dann vollständig, wenn die Anzahl der Zustände ω_i der Anzahl $\tilde{k}$ der linear unabhängigen Vektoren $(B, S_1^{(1)}, \dots, S_1^{(n)})$ entspricht.*

Beispiel 1.15 (Fs. Beispiel 1.1). Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{20}{3} \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix}$ hat vollen Rang, der Markt ist vollständig.

Beispiel 1.16 (Fs. Beispiel 1.2). $A = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{20}{3} \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ hat Rang 2, aber $k = 3$. Der Markt ist nicht vollständig.

Das RNM in diesem Beispiel war $\mathbb{Q} = (\lambda, 2 - 3\lambda, -1 + 2\lambda)$ mit $\lambda \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$. Insbesondere ergibt sich für alle RNM $\mathbb{Q}(\lambda)$ derselbe Preis $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1] = \lambda \frac{9}{10} X_1 + (2 - 3\lambda) \frac{9}{10} X_2 + (-1 + 2\lambda) \frac{9}{10} X_3 = \frac{9}{10}(2X_2 - X_3) + \frac{9}{10}\lambda(X_1 - 3X_2 + 2X_3)$ genau dann unabhängig vom Wert von λ, wenn $X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0$, also der Claim überhaupt erreichbar ist, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben. Alle nicht erreichbaren Claims haben keinen eindeutigen Preis!

Beispiel 1.17. Betrachte nun Beispiel 1.1 mit einem zusätzlichen Asset: $S_0^{(2)} = 54$, $S_1^{(2)}(\omega_1) = 70$ und $S_1^{(2)}(\omega_2) = 50$. Das Maß $\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ist noch immer ein RNM ($54 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} \cdot 70 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} \cdot 50$). Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{20}{3} & 70 \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} & 50 \end{pmatrix}$ erfüllt nun $RgA = 2 = k$. Damit ist der Markt vollständig. Allerdings ist das replizierende Portfolio nicht eindeutig (jedes replizierende Portfolio hat aber denselben Anfangswert!).

Definition 1.16 (Menge alle risikoneutralen Maße). *Die Menge aller risikoneutralen Maße wird mit $\mathbb{M}$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.13. Nach unserer Grundvoraussetzung der Absenz von Arbitrage gilt auf alle Fälle $\mathbb{M} \neq \emptyset$.

Theorem 1.13. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Das Modell ist vollständig.*
2. *Für jeden CC X gilt: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1]$ hat für alle $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ denselben Wert.*
3. *$\mathbb{M}$ enthält genau ein risikoneutrales Maß ($|\mathbb{M}| = 1$).*

Beweis.

1.⇒2. Nach Voraussetzung enthält $\mathbb{M}$ mindestens ein RNM. Nach der Argumentation des letzten Abschnittes muss für jeden erreichbaren Claim der Anfangswert $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1]$ aller erzeugenden Handelsstrategie übereinstimmen, sonst ist Arbitrage möglich.

2.⇒1. Betrachte einen nicht erreichbaren CC X und ein RNM $\widehat{\mathbb{Q}} \in \mathbb{M}$. Wir werden uns nun ein RNM $\mathbb{Q}$ konstruieren, sodass $\mathbb{Q}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[X/B_1] \neq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1]$ gilt.

Dass X nicht erreichbar ist, bedeutet, dass $A \cdot H = X$ keine Lösung besitzt. Das Farkas-Lemma [Far02] aus der linearen Optimierung (siehe Anhang) sagt für diesen Fall jedoch aus, dass

$$\exists \pi : \pi \cdot A = 0, \delta = \pi \cdot X > 0\,.$$

Definieren wir nun $\mathbb{Q}(\omega_k) = \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k) + \lambda \pi_k B_1(\omega_k)$, so gilt für genügend kleines $\lambda > 0$, dass $\mathbb{Q}(\omega_k) > 0$. Es ist nun nicht mehr sehr schwer zu zeigen, dass $\mathbb{Q}$ ein RNM ist:

1. $\mathbb{Q}(\omega_i) > 0$
2. $\sum_k \mathbb{Q}(\omega_k) = \sum_k \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k) + \underbrace{\lambda\pi \cdot B_1(\omega_k)}_{\substack{=0,\text{ da } B_1 \text{ die}\\ 1.\text{ Spalte von } A}} = \sum_k \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k) = 1.$
3. Die Martingalbedingung ist ebenfalls erfüllt, wie aus der Martingalbedingung für $\widehat{\mathbb{Q}}$ und dem Farkas-Lemma sofort folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\widetilde{S}_1^{(n)} &= \sum_k \mathbb{Q}(\omega_k)\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega_k) = \sum_k \mathbb{Q}(\omega_k) S_1^{(n)}(\omega_k)/B_1(\omega_k)\\ &= \sum_k \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k)\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega_k) + \lambda \underbrace{\sum_k \pi_k B_1(\omega_k)\frac{S_1^{(n)}(\omega_k)}{B_1(\omega_k)}}_{=0,\text{ da } S_1^{(n)} \text{ die } n.\text{ Spalte von } A} = \sum_k \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k)\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega_k) = \widetilde{S}_0^{(n)}\end{aligned}$$

Es muss nun nur noch gezeigt werden, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1] \neq \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[X/B_1]$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1] = \sum_k \mathbb{Q}(\omega_k)X(\omega_k)/B_1(\omega_k) &= \sum_k \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k)X(\omega_k) + \lambda \underbrace{\sum_k \pi_k X(\omega_k)}_{=\delta}\\ &= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[X/B_1] + \underbrace{\lambda\delta}_{>0} > \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[X/B_1]\end{aligned}$$

3.⇒2. Diese Implikation ist trivial, da nur ein einziges RNM in $\mathbb{M}$ existiert.

2.⇒3. Seien $\mathbb{Q}$ und $\widehat{\mathbb{Q}}$ zwei RNM mit $\mathbb{Q} \neq \widehat{\mathbb{Q}}$, d.h. $\exists \omega_k \in \Omega : \mathbb{Q}(\omega_k) \neq \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k)$. Betrachte nun den Contingent Claim $X(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega=\omega_k\}} B_1(\omega_k)$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{B_1}\right] = \frac{B_1(\omega_k)}{B_1(\omega_k)}\mathbb{Q}(\omega_k) = \mathbb{Q}(\omega_k) \neq \widehat{\mathbb{Q}}(\omega_k) = \frac{B_1(\omega_k)}{B_1(\omega_k)}\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}\left[\frac{X}{B_1}\right].$$

Damit (und weil $\mathbb{Q}$ keine Nullmengen besitzt) kann es also nur ein eindeutiges Martingalmaß $\mathbb{Q}$ geben: $|\mathbb{M}| = 1$

Aus dem Beweis der Äquivalenz des ersten und zweiten Punktes des Theorems sieht man außerdem sofort folgendes Lemma:

Lemma 1.14. *Ein CC X ist dann und nur dann erreichbar, wenn für jedes RNM $\mathbb{Q}$ der Erwartungswert $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/B_1]$ denselben Wert annimmt.*

Bemerkung 1.14. In einem vollständigen Markt ist also jeder CC X bepreisbar mit einem eindeutigen RNM, und jeder CC X ist durch eine HS H erreichbar, deren Wert zu $t = 0$ genau dem Preis des CC entspricht. In einem unvollständigen Markt gibt es jedoch mehrere RNM, die aufgrund des letzten Lemmas für die nicht erreichbare CCs X auch unterschiedliche Preise liefern! Wenn also keine replizierende Handelsstrategie mehr existiert, ist auch der Preis nicht mehr eindeutig. Alle Preise, die als $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}]$ für ein $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ bestimmt wurden, sind jedoch faire Preise in dem Sinn, dass dann Arbitrage ausgeschlossen ist, wenn konsistent dasselbe Maß $\mathbb{Q}$ benutzt wird.

1.5.1 Unvollständige Märkte

In einem unvollständigen Markt existieren also i.A. keine eindeutigen Preise mehr. Allerdings können wir Schranken für faire Preise auf zwei verschiedene Arten angeben:

1. Auch wenn wir einen CC nicht exakt erzeugen können, können wir Handelsstrategien betrachten, die in jedem Marktzustand mehr oder gleichviel („Superhedging“) bzw. immer weniger oder gleich viel („Subhedging“) wert sind. Der eindeutige Preis jeder dieser Handelsstrategien ist eine obere (untere) Schranke für den Preis des CC, da es ansonsten Arbitragemöglichkeiten gibt.
2. Die Menge aller $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}]$ für $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ ist die Menge aller fairen Preise (in dem Sinn, dass keine Arbitrage möglich ist).

Aus dem ersten Zugang ergibt sich folgende Definition

Definition 1.17 (Schranken für den faire Preise in unvollständigen Märkten).

Obere Schranke für Preis: $V_+(X) = \inf \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{Y}] : Y \geq X, Y \text{ erreichbar} \right\}$

Untere Schranke für Preis: $V_+(X) = \inf \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{Y}] : Y \geq X, Y \text{ erreichbar} \right\}$

Die Schranken für die fairen Preise von nicht erreichbaren Claims werden also durch Vergleich mit allen erreichbaren Claims bestimmt. Wie folgendes Lemma zeigt, liefert dieser Zugang tatsächlich scharfe Schranken für die Preise und führt zu denselben Schranken wie der zweite Zugang über $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}]$:

Lemma 1.15 (o.B.). *Ist $\mathbb{M} \neq \emptyset$, so gilt für jeden Contingent Claim X:*

$$V_+(X) = \sup \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}] : \mathbb{Q} \in \mathbb{M} \right\}$$
$$V_-(X) = \inf \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}] : \mathbb{Q} \in \mathbb{M} \right\}$$

Ein erreichbarer Claim $Y \geq X$, der nie weniger liefert, hat also jedenfalls keinen geringeren Preis als er durch das risikoneutrale Bewertungsprinzip für den nicht erreichbaren Claim X bestimmt ist.

Beispiel 1.18 (Fs. Beispiel 1.2). Die Menge der RNM war $\mathbb{M} = \left\{ (\lambda, 2-3\lambda, -1+2\lambda) | \lambda \in \left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[\right\}$. Der Claim $X = (30, 20, 10)$ ist nicht erreichbar, da $X_1 - 3X_2 + 2X_3 = -1 \neq 0$ gilt.
Aus dem risikoneutralen Bewertungsprinzip ergeben sich Preise $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}] = \lambda \frac{9}{10} \cdot 30 + (2-3\lambda)\frac{9}{10} \cdot 20 + (-1 + 2\lambda)\frac{9}{10} \cdot 10 = -9\lambda + 27$. Insbesondere ergibt sich wegen $\lambda \in \left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$ für die fairen Preise p ein Intervall von $p \in]21, 22.5[$. Obiges Lemma sagt nun, dass

$$V_-(X) = \inf_\lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}] = 21 \qquad V_+(X) = \sup_\lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}] = 22.5$$

Diese beiden Schranken werden tatsächlich von erreichbaren Sub- und Superhedging-Strategien angenommen:

- $Y = (30, \frac{50}{3}, 10)$ erfüllt $Y \geq X$ und hat einen Wert von $V(Y) = 21 = V_-(X)$.
- $Y = (30, 20, 15)$ erfüllt $Y \leq X$ und hat einen Wert von $V(Y) = 22.5 = V_+(X)$.

1.6 Risiko und Ertrag (Return)

Definition 1.18. *Für $\omega \in \Omega$ und $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ wird $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{X}] = \mathbb{Q}(\omega)/B_1(\omega)$ für $X(\widehat{\omega}) = \mathbb{1}_{\{\omega=\widehat{\omega}\}}$ als Zustandspreis des Zustands ω bezeichnet.*

Definition 1.19. *Der Return eines Assets ist definiert als die ZV, die den relative Wertzuwachs beschreibt*

$$R_n = \frac{S_1^{(n)} - S_0^{(n)}}{S_0^{(n)}}, n = 1, \ldots, N \qquad R_0 := r = \frac{B_1 - B_0}{B_0}$$

Lemma 1.16. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\omega) > 0 \forall \omega \in \Omega$ ist genau dann ein RNM, wenn*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{R_n - R_0}{1 + R_0}\right] = 0, n = 1, \ldots, N$$

Beweis.

$$\widetilde{S}_1^{(n)} - \widetilde{S}_0^{(n)} = \frac{S_1^{(n)} - B_1 S_0^{(n)}}{B_1} = \frac{(1+R_n)S_0^{(n)} - (1+R_0)S_0^{(n)}}{1+R_0} = S_0^{(n)} \frac{R_n - R_0}{1+R_0}$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta \widetilde{S}^{(n)}\right] = S_0^{(n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{R_n - R_0}{1+R_0}\right]$$

Bemerkung 1.15. Bei deterministischer Zinsrate $R_0(\omega) = r$ folgt sofort, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R_n] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R_0] = r$ äquivalent ist zur Tatsache, das $\mathbb{Q}$ ein RNM ist.

1.7 Optimale Portfolios, Zulässigkeit

Problem: Bestimmung der optimalen Handelsstrategie nach subjektiven Kriterien.

Definition 1.20 (Nutzenfunktion). *Eine Nutzenfunktion $U : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, die für alle $\omega \in \Omega$*

1. *für $w \mapsto U(w, \omega)$ differenzierbar,*
2. *konkav („risikoavers“) und*
3. *streng monoton steigend ist.*

$U(w, \omega)$ bezeichnet den subjektiv empfundenen Nutzen des Betrages w im Zustand ω, wobei nicht absolute Werte Bedeutung haben, sondern nur der Vergleich zweier oder mehrerer möglicher Werte relevant ist. U beschreibt also, wie ich subjektiv den Betrag w bewerte. Die Konkavität von U bedeutet, dass die Steigung – also die Nutzenänderung desselben Betrages – bei geringen Beträgen höher ist als bei hohen Beträgen (Für jemanden, der bereits 10 Mio. € besitzt, ist 1 € keine so große Verbesserung wie für jemanden, der nur sehr wenig Kapital besitzt). Die strenge Monotonie hat die nahe liegende Bedeutung, dass ein höherer Betrag immer mehr Nutzen hat als ein geringerer Betrag.

Die Kenngröße, um die Auswahl eines Portfolios zu optimieren ist nun der erwartete Nutzen des Endwertes:

$$\mathbb{E}U(V_1) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) U(V_1(\omega), \omega)$$

Bemerkung 1.16. Oft wird angenommen, dass der Nutzen eines Betrages w nicht vom Marktzustand ω abhängig ist, also $U(w, \omega) = U(w)$.

Bemerkung 1.17. Der erwartete Nutzen muss bezüglich der tatsächlich eintretenden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden! Als Daumenregel kann man sich merken:

- Geht es um die *Bestimmung des Preises* (der sich ja aufgrund der No-Arbitrage Bedingung aus den Preisen der am Markt verfügbaren Assets ergibt), ist ein *risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ für den Erwartungswert zu benutzen. Hierfür werden die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}$ der einzelnen Marktzustände gar nicht benötigt!

- Geht es jedoch um *tatsächliche Auszahlungen*, ist sehr wohl das *tatsächliche Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ zu benutzen.

Definition 1.21. $\mathbb{H}$ *bezeichne die Menge aller Handelsstrategien.*

Problem 1 (Optimales Portfolio-Problem). *Sei $\nu \in \mathbb{R}$ das Anfangskapital. Gesucht ist die Handelsstrategie $H \in \mathbb{H}$ mit*

$$\max_{H \in \mathbb{H}} \mathbb{E}U(V_1) \tag{1.1}$$

$$\textit{unter } V_0 = \nu \tag{1.2}$$

Problem 2 (Alternative Formulierung des Optimalen Portfolio-Problems). *Mit den Definitionen $V_1 = B_1 \widetilde{V}_1 = B_1 \cdot \left(\widetilde{V}_0 + \widetilde{G}\right)$ sowie durch Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung ergibt sich eine alternative Formulierung*

$$\max_{H \in \mathbb{H}} \mathbb{E}\left[U\left(B_1 \cdot (\nu + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \widetilde{S}^{(n)})\right)\right] \tag{1.3}$$

Lemma 1.17. *Wenn* (1.1) *oder* (1.3) *eine Lösung besitzt, gibt es keine Arbitrage-Möglichkeit (und damit ein RNM). Äquivalent dazu ist die Aussage: Existiert eine Arbitrage-Möglichkeit, hat* (1.1) *keine Lösung und der Nutzen kann beliebig erhöht werden.*

Beweis. Wir werden die zweite Formulierung beweisen. Sei $\widehat{H}$ optimal und H eine Arbitrage-Möglichkeit. Betrachte die Handelsstrategie $\bar{H} = \widehat{H} + H$:

$$\nu + \sum_{n=1}^{N} \bar{H}_n \Delta \widetilde{S}^{(n)} = \nu + \sum_{n=1}^{N} \widehat{H}_n \Delta \widetilde{S}^{(n)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta \widetilde{S}^{(n)}}_{\geq 0} \geq \nu + \sum_{n=1}^{N} \widehat{H}_n \Delta \widetilde{S}^{(n)}$$

Die Ungleichung ist wegen der Definition einer Arbitrage-Möglichkeit H für mindestens ein $\omega \in \Omega$ strikt, was einen Widerspruch zur Optimalität von $\widehat{H}$ darstellt.

Betrachten wir nun zum Abschluss noch den Zusammenhang zwischen Optimaler Handelsstrategie und einem risikoneutralen Maß.

Lemma 1.18. *Ist H mit Wert V_t eine Lösung von* (1.1) *oder* (1.3)*, so ist*

$$\mathbb{Q}(\omega) = \frac{\mathbb{P}(\omega) B_1(\omega) U'(V_1(\omega), \omega)}{\mathbb{E}\left[B_1 U'(V_1)\right]}$$

ein risikoneutrales Maß.

Beweis. Aus der Extremalbedingung 1. Ordnung erhalten wir

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial H_n} \mathbb{E}\left[U\left(B_1 \cdot \left(\nu + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \widetilde{S}^{(n)}\right)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial H_n} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) U\left(B_1(\omega) \cdot \left(\nu + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \widetilde{S}^{(n)}(\omega)\right), \omega\right)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) U'\left(B_1(\omega) \cdot \left(\nu + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \widetilde{S}^{(n)}(\omega)\right), \omega\right) B_1(\omega) \Delta \widetilde{S}^{(n)}(\omega) = \mathbb{E}\left[U'(V_1) B_1 \Delta \widetilde{S}^{(n)}\right].$$

Andererseits folgt aus der Martingalbedingung für ein risikoneutrales Maß:

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta \widetilde{S}^{(n)}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{Q}(\omega) \Delta \widetilde{S}^{(n)}(\omega) \tag{1.4}$$

Durch Koeffizientenvergleich können wir wir also die Beziehung

$$\mathbb{Q}(\omega) = a \cdot \mathbb{P}(\omega) U'(V_1(\omega)) B_1(\omega)$$

isolieren, wobei wir die Normierungkonstante a noch bestimmen müssen. Insgesamt ergibt sich damit in Abhängigkeit von der Wahl von U für das risikoneutrale Maß:

$$\mathbb{Q}(\omega) = \frac{\mathbb{P}(\omega) U'(V_1(\omega)) B_1(\omega)}{\mathbb{E}\left[U'(V_1) B_1\right]}$$

Definition 1.22 (zulässiges Marktmodell). *Ein Marktmodell ist zulässig, wenn $\exists U : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ und ein Startkapital ν, sodass*

1. *$w \mapsto U(w, \omega)$ für alle ω konkav und streng monoton steigend ist und*
2. *das Portfolio-Problem* (1.1) *eine Lösung besitzt.*

Theorem 1.19 (Zusammenhang von Zulässigkeit und RNM). *Ein Marktmodell ist zulässig dann und nur dann, wenn ein risikoneutrales Maß existiert.*

Beweis.

$\Rightarrow$ Wurde schon durch obiges Lemma 1.18 gezeigt.

$\Leftarrow$ Sei $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ ein risikoneutrales Maß. Wir konstruieren uns nun eine Nutzenfunktion $U(w, \omega)$ und ein Startkapital ν, sodass (1.1) eine Lösung besitzt. Wähle ν beliebig und setze

$$U(w, \omega) = w \cdot \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega) B_1(\omega)}.$$

Diese Funktion ist für jede Wahl von ω linear in w und damit sowohl differenzierbar in w, streng monoton steigend in w ($\mathbb{Q} > 0$), als auch konkav in w und somit eine Nutzenfunktion.

Wir werden nun zeigen, dass der erwartete Nutzen unabhängig von der Wahl der Handelsstrategie immer ν ist und somit diese Konstante auch die Lösung des Optimierungsproblems (1.1) darstellt. Nimm dazu eine beliebige Handelsstrategie $H \in \mathbb{R}^N$.

$$\mathbb{E}\left[U\left(B_1 \cdot (\nu + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \widetilde{S}^{(n)})\right)\right] = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) B_1(\omega) \cdot \left(\nu + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \widetilde{S}^{(n)}(\omega)\right) \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)B_1(\omega)}$$
$$= \nu + \sum_{n=1}^{N} H_n \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta \widetilde{S}^{(n)}]}_{=0,\text{ weil } \mathbb{Q}\text{ RNM}} = \nu$$

Beispiel 1.19. Betrachte ein (vollständiges) Marktmodell mit $N = 2$, $k = 3$ und $r = \frac{1}{9}$. Die Assets haben folgende Entwicklung:

n	$\widetilde{S}_0^{(n)}$	$\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega_1)$	$\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega_2)$	$\widetilde{S}_1^{(n)}(\omega_3)$
1	6	6	8	4
2	10	13	9	8

Das RNM ergibt sich aus $\widetilde{S}_0^{(n)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_1^{(n)}]$:

$$\begin{aligned}
6 &= 6\mathbb{Q}(\omega_1) + 8\mathbb{Q}(\omega_2) + 4\mathbb{Q}(\omega_3)\\
10 &= 13\mathbb{Q}(\omega_1) + 9\mathbb{Q}(\omega_2) + 8\mathbb{Q}(\omega_3)\\
1 &= \mathbb{Q}(\omega_1) + \mathbb{Q}(\omega_2) + \mathbb{Q}(\omega_3)
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $\mathbb{Q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Als Beispiel sehen wir uns nun die exponentielle Nutzenfunktion $U(w) = -\exp(-w)$ an mit $U'(w) = \exp(-w)$. Das optimale Portfolio für diese Wahl der Nutzenfunktion ergibt sich aus der Bedingung $0 = \mathbb{E}[U'(V_1)B_1\Delta\widetilde{S}^{(n)}]$, bzw. dem Gleichungssystem

$$n=1: \quad 0 = \mathbb{P}(\omega_1)e^{-\frac{10}{9}(\nu+3H_2)}\frac{10}{9}\cdot 0 \quad + \quad \mathbb{P}(\omega_2)e^{-\frac{10}{9}(\nu+2H_1-H_2)}\frac{10}{9}\cdot 2 \quad - \quad \mathbb{P}(\omega_3)e^{-\frac{10}{9}(\nu-2H_1-2H_2)}\frac{10}{9}\cdot 2$$
$$n=2: \quad 0 = \mathbb{P}(\omega_1)e^{-\frac{10}{9}(\nu+3H_2)}\frac{10}{9}\cdot 3 \quad - \quad \mathbb{P}(\omega_2)e^{-\frac{10}{9}(\nu+2H_1-H_2)}\frac{10}{9}\cdot 1 \quad - \quad \mathbb{P}(\omega_3)e^{-\frac{10}{9}(\nu-2H_1-2H_2)}\frac{10}{9}\cdot 2$$

Dieses Gleichungssystem ist nun nicht mehr linear und kann nicht analytisch, sondern nur nummerisch gelöst werden.

1.7.1 Übungsaufgaben

Bsp. 1.1) Betrachte ein Ein-Perioden-Modell mit zwei risikobehafteten Wertpapieren und drei möglichen Marktzuständen ($N = 2$, $K = 3$, Zins $r = \frac{1}{9}$):

$$\begin{aligned}
S_0 &= 5, \qquad & S_1(\omega_1) &= \frac{20}{3}, \qquad & S_2(\omega_1) &= \frac{70}{9}\\
& & S_1(\omega_2) &= \frac{40}{9}, & S_2(\omega_2) &= \frac{40}{9}\\
& & S_1(\omega_3) &= \frac{30}{9}, & S_2(\omega_3) &= \frac{20}{9}
\end{aligned}$$

Betrachte eine Call-Option auf Wertpapier 1:

$$V_{t=1}(\omega_i) = (S_1(\omega_i) - K)^+, \quad K = \frac{35}{9}$$

Finde die Handelsstrategie $H = (H_0, H_1, H_2)$, die diesen Claim erzeugt. Was ist der momentane Wert dieser Option?

Führe selbiges auch mit Aktie 2 durch!

Wenn konstant $V_{t=1}(\omega_i) = 10$ ausbezahlt werden sollen, wie viel ist dieser Vertrag wert?

Bsp. 1.2) Zeige: H ist eine Arbitrage-Möglichkeit $\iff$ a) $G^*(\omega) \geq 0 \; \forall \, \omega \in \Omega$ und b) $\mathbb{E}[G^*] > 0$.

Bsp. 1.3) Sei r konstant und P_0 und C_0 die Preise der Put- und Call-Option mit demselben Strike-Preis K.

Zeige, dass entweder beide erreichbar sind oder beide nicht. Zeige in ersterem Fall (mittels risikoneutraler Bewertung), dass die Put-Call-Parität gilt:

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r}$$

Kapitel 2

Wh. Wahrscheinlichkeitstheorie

- W-Raum, σ-Algebra, W-Maß, ZV, Ereignis, Messbarkeit, endliche σ-Algebren
- absolut stetige Maße, äquivalente Maße, Radon-Nikodym
- Stochastische Prozesse: Filtrierungen, adaptierte Prozesse

Kapitel 3

Mehr-Perioden-Modell in diskreter Zeit

- Marktmodell: Bankkonto (Numéraire), Asset-Preise, Annahmen
- Handelsstrategien: Wert des Portfolios, selbst-finanzierend
- Diskontierung
- Bewertungsfunktionale: erreichbare Gewinne, Gesetz des eindeutigen Preises
- Dualität Bewertungsfunktionale und Preis (Hahn-Banach, Trennungssatz für Beweis)
- Arbitrage-Freiheit
- Satz von Dalang, Morton, Willinger: äquivalente Bedingungen zu Arbitrage-Freiheit
- vollständige Märkte

Kapitel 4

Wh. Martingaltheorie

- Bedingte Erwartungen, Eigenschaften
- stochastischer Kern
- Martingale, Doob'sche Zerlegung, Bayes'sche Formel
- Stoppzeiten, Optimal Stopping Theorem, gestoppte Prozesse

Kapitel 5

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- Sharpe-Ratio
- Portfolio-Optimierungsproblem, Varianz-Optimierung, Mean-variance Effizienz
- Nutzen-Optimierung, duales Optimierungsproblem, Nutzen-indifferente Preise

Kapitel 6

Das Binomialmodell

6.1 Beschreibung des Modells

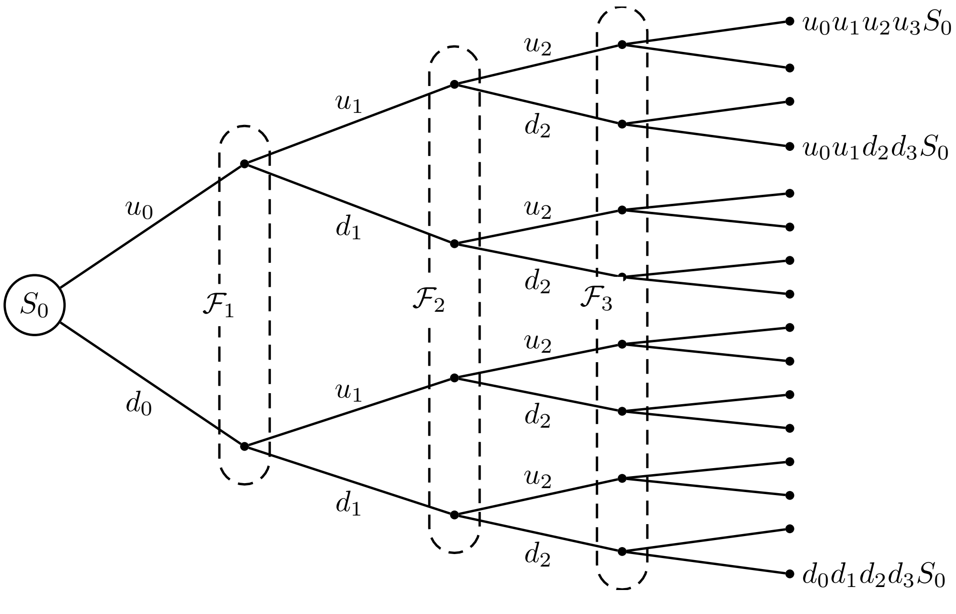
Definition 6.1 (Assets im Binomialmodell).

1. *Bankkonto (risikolos): $B_0 = 1$, $B_t = e^{r_t} B_{t-1}$ mit $r_t \in \mathbb{R}$ für $t = 1, \dots, T$*
2. *risikobehaftete(s) Asset(s) (Stock/Aktie): $S_0 > 0$ (konstant) und für $t = 1, \dots, T$:*

$$S_t = \begin{cases} u_t \cdot S_{t-1}, & \text{wenn } X_t = 1 \text{ („up“)} \\ d_t \cdot S_{t-1}, & \text{wenn } X_t = 0 \text{ („down“)} \end{cases}$$

mit Konstanten $0 < d_t < u_t$ und Bernoulli-Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_T$.

Zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, T$ teilen sich alle bisher gleich verlaufenden Pfade in je zwei Klassen auf, die einen, die nun nach oben springen, während die anderen nach unten springen. Damit erhält man jeweils eine Information mehr zu $1, \dots, T$, beschrieben durch die Filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T$. Jedes Atom der Filtration $\mathcal{F}_t$ wird dabei jeweils in zwei Atome von $\mathcal{F}_{t+1}$ geteilt. Folgendes Bild kann das schön verdeutlichen:



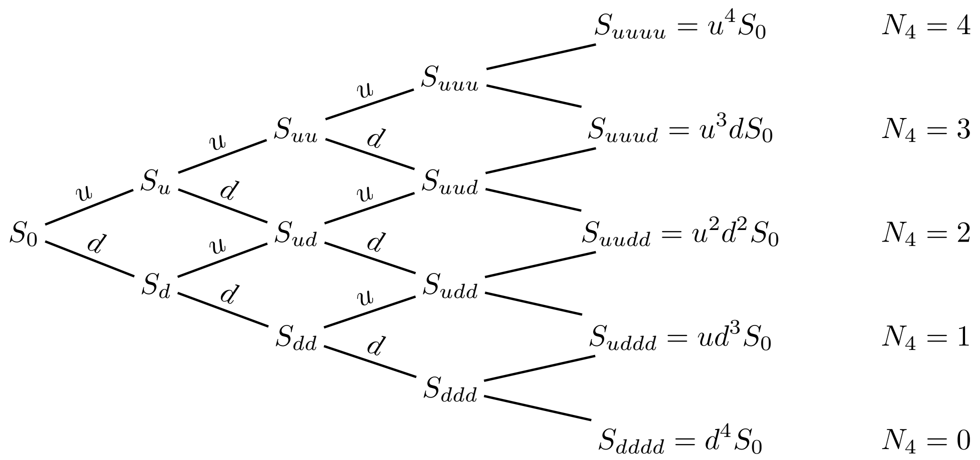
Die Beschreibung der Pfade erfolgt durch $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariablen: Seien $X_1, \dots, X_T$ $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_T = x_T) > 0$ für alle $(x_1, \dots, x_T) \in \{0,1\}^T$. Der Vektor $\omega =$

$(x_1, \dots, x_T)$ beschreibt dann einen Pfad im Baum, wobei $x_i = 1$ ein Schritt nach oben und $x_i = 0$ ein Schritt nach unten bedeutet. Insgesamt gibt es daher $|\Omega| = 2^T$ Pfade.

6.1.1 Das Cox-Ross-Rubinstein (CRR) Modell als Spezialfall

Definition 6.2 (Cox-Ross-Rubinstein Binomialmodell). *Das Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein ist der Zeit-homogene Spezialfall des Binomialmodells, in dem $u_t = u \forall t$ und $d_t = d \forall t$, sowie $r_t = r$ mit $e^{r_t} = (1+R) \forall t$ gewählt wird.*

Aus dem Binomialbaum mit 2^T verschiedenen Endwerten zum Zeitpunkt T wird damit ein Gitter („Binomial lattice", manchmal auch als „Recombining binomial tree" bezeichnet) mit $T+1$ verschiedenen Endwerten zum Zeitpunkt T. Ein Pfad kann nun beschrieben werden durch einen modifizierten Bernoulli-Prozess („T-facher Münzwurf"): $\{X_t, t = 1, \dots, T\}$ ist ein stochastischer Prozess, wobei die $X_1, \dots, X_T$ unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen auf $\{0, 1\}$ mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \dots = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p$.



Bemerkung 6.1. Die Reihenfolge, in der die up- und down-Bewegungen vor sich gehen, ist für den Wert des Prozesses irrelevant. Insbesondere ist $S_{ud} = S_{du}$.

Wahrscheinlichkeitsmaß für Pfad $\omega = (x_1, \dots, x_T)$

Definiere den Zählprozess $N_t(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_t(\omega)$, der die Anzahl der Sprünge nach oben zählt. Insbesondere charakterisiert er auch den Wert des Pfades zum Zeitpunkt t und damit die Position im Gitter, unabhängig vom Verlauf des Pfades bis zum entsprechenden Punkt. Es gilt:

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum \mathbb{E}[X_i] = tp \qquad Var[N_t] \overset{\text{unabh.}}{=} \sum Var X_i = tp(1-p)$$

Man sieht nun, dass für $t = 1, \dots$ die Verteilung von N_t gegeben ist durch:

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \underbrace{\binom{t}{n}}_{\substack{\#\text{Pfade} \\ \text{mit } N_t = n}} \underbrace{p^n (1-p)^{t-n}}_{\substack{n \text{ mal nach oben,} \\ (t-n) \text{ mal nach unten}}} \quad , n = 0, 1, \dots, t$$

Lemma 6.1. *Die Verteilung von N_t, die auch die Verteilung der Werte S_t des Assets zu t beschreibt, ist die Binomialverteilung:*

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(X_t = S_0 u^n d^{t-n}) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}$$

Bemerkung 6.2. Der Prozess kann zum Zeitpunkt t nur $t+1$ verschiedene Werte annehmen!

6.2 Arbitrage-Überlegungen

Lemma 6.2. *Aus der „No-Arbitrage"-Bedingung ergibt sich:*

$$d_t < e^{r_t} < u_t \quad \forall t = 1, \dots, T\,. \tag{6.1}$$

Das risikoneutrale Maß im Binomialmodell ist eindeutig und besitzt die Form

$$q_t = \frac{e^{r_t} - d_t}{u_t - d_t} \tag{6.2}$$

Übungsbeispiel 6.1. Wenn (6.1) nicht erfüllt ist, gib eine Arbitrage-Strategie an!

Betrachte nun den diskontierten risikobehafteten Preisprozess

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \begin{cases} \widetilde{S}_{t-1} u_t e^{-r_t} & \text{wenn } X_t = 1, \\ \widetilde{S}_{t-1} d_t e^{-r_t} & \text{wenn } X_t = 0, \end{cases}$$

Beweis. Wenn ein Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert für $\widetilde{S}_0, \dots, \widetilde{S}_T$ (und damit keine Arbitrage möglich ist), dann gilt für $t = 1, \dots, T$

$$\widetilde{S}_{t-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}]$$

und nach Division durch das $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare $\widetilde{S}_{t-1}$ weiter

$$1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}\right| \mathcal{F}_{t-1}\right] = u_t e^{-r_t} \underbrace{\mathbb{Q}(X_t = 1 | \mathcal{F}_{t-1})}_{=q_t} + d_t e^{-r_t} \underbrace{\mathbb{Q}(X_t = 0 | \mathcal{F}_{t-1})}_{=1-q_t} = u_t e^{-r_t} q_t + d_t e^{-r_t}(1 - q_t)\,.$$

Aufgelöst nach q_t ergibt dies das eindeutig bestimmte risikoneutrale Maß

$$q_t = \frac{e^{r_t} - d_t}{u_t - d_t}$$

Dies ist nur ein RNM mit $q_t \in \,]0,1[$, wenn obige Ungleichungen $d_t < e^{r_t} < u_t$ erfüllt sind.

Bemerkung 6.3. Im CRR Modell ergibt sich für die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit eines Sprungs nach oben

$$q = \frac{(1+R) - d}{u - d}\,.$$

Das Martingalmaß für einen Pfad ω mit n Sprüngen nach oben ist $\mathbb{Q}(\omega) = q^n (1-q)^{t-n}$, das Martingalmaß für den Wert S_t ist

$$\mathbb{Q}(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = \binom{t}{n} q^n (1-q)^{t-n}, n = 0, 1, \dots, t$$

Bemerkung 6.4. Da $q_t = \mathbb{Q}(X_t = 1 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{Q}(X_t = 1)$ unabhängig vom bisherigen Verlauf und dem Wert X_{t-1} – insbesondere also unabhängig von $\mathcal{F}_{t-1}$ – ist, folgt

$$\mathbb{Q}(X_1 = x_1, \dots, X_T = x_T) = \mathbb{Q}(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{Q}(X_T = x_T) \forall x_1, \dots, x_T \in \{0, 1\}$$

durch iteriertes Bedingen. D.h. die $X_1, \dots, X_T$ sind unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen (nicht notwendigerweise identisch verteilt) unter $\mathbb{Q}$!

Bemerkung 6.5. Wenn (6.1) gilt, ist das Martingalmaß eindeutig und das Marktmodell daher vollständig. Es gibt also kein arbitragefreies unvollständiges Binomialmodell.

6.3 Bepreisung im Binomialmodell

Idee. Sei $h : \Omega \to \mathbb{R}$ ein Contingent Claim zur Zeit T, der $\mathcal{F}_T = \sigma(X_1, \dots, X_T)$-messbar ist. Dann sind die arbitragefreien diskontierten Preise gegeben durch $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[h/B_T|\mathcal{F}_t]$ und die nicht diskontierten Preise durch

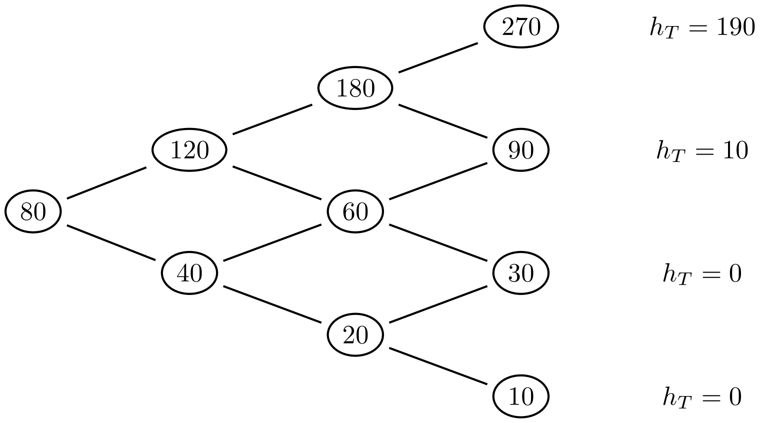
$$B_t \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{h}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[e^{-(r_{t+1}+\dots+r_T)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] \text{ für } t = 0, 1, \dots, T\,.$$

Bemerkung 6.6. Das Modell könnte erweitert werden auf stochastische $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare d_t, u_t und r_t, die (6.1) erfüllen. Die Unabhängigkeit der $X_1, \dots, X_T$ unter $\mathbb{Q}$ geht dabei aber eventuell verloren.

Beispiel 6.1 (CRR Modell, Preisdynamik im Binomialbaum). Sei $T = 3$, $S_0 = 80$, $u = 1.5$, $d = 0.5$, $p_u = 0.6$, $p_d = 0.4$ und $R = 0$.
Betrachte eine Europäische Call-Option mit Ausübungszeitpunkt $T = 3$ und Ausübungspreis $K = 80$. Der Payoff ist also

$$h_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+\,.$$

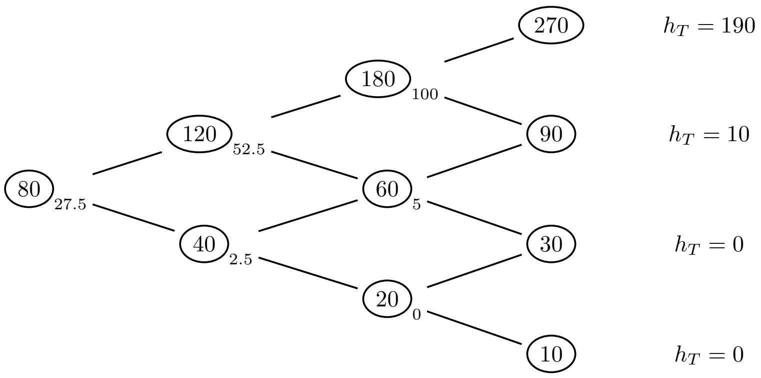
Der Binomialbaum für den Preisverlauf S_t der Aktie sieht folgendermaßen aus:



Die Bestimmung des Preises $\Pi(t)$ zu Zeitpunkten $t < T$ erfolgt durch Rückwärtsinduktion aus $\Pi(T|\mathcal{F}_T) = h_T$ mittels risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$, $q_u = q_d = \frac{1}{2}$:

$$\text{z.B.}\,\Pi(t = 2|S_2 = 180) = \frac{1}{2} \cdot 190 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 100$$

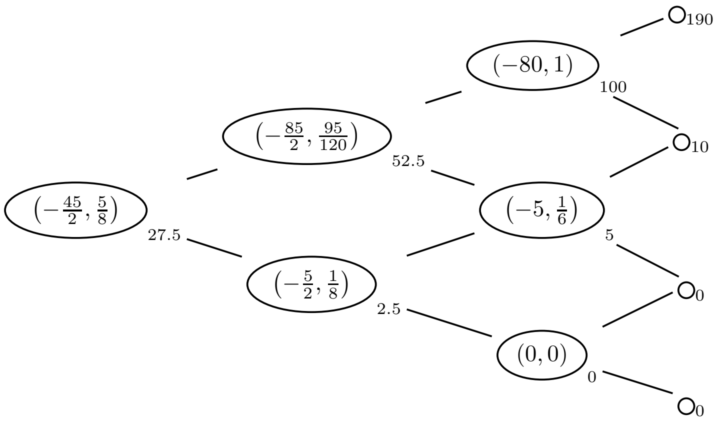
Damit ergibt sich die Preisstruktur der Option als Replizierendes Portfolio durch Vorwärtsinduktion:



Beginne bei $t = 0$. Gesucht ist (x_1, y_1), sodass

$$\begin{aligned} x_1 + 80y_1 &= 27.5 \quad &&(\text{Preis zu } t = 0)\\ x_1 + 120y_1 &= 52.5 \quad &&(\text{Preis zu } t = 1,\ X_1 = 1 \text{ (up) })\\ x_1 + 40y_1 &= 2.5 \quad &&(\text{Preis zu } t = 1,\ X_1 = 0 \text{ (down) }) \end{aligned}$$

Dieses redundante Gleichungssystem von drei Gleichungen für (x_1, y_1) besitzt die eindeutige Lösung $x_1 = -22.5$, $y_1 = 0.625$. Der Preis (rechte Seite des GS) wurde genau so bestimmt, dass diese Gleichungen eine Lösung besitzen.
Analog kann nun zu jedem Zeitpunkt $t-1$ das Portfolio (x_t, y_t) ausgehend von der momentanen Position im Gitter bestimmt werden:



Proposition 6.3. *Betrachte einen Claim $X = \Phi(S_T)$. Dieser kann durch ein selbstfinanzierendes Portfolio erreicht werden. Bezeichne $V_t(k)$ den Wert am Knoten $(t, N_t = k)$. Dann kann $V_t(k)$ rekursiv bestimmt werden*

$$V_T(k) = \Phi\left(S_0 \prod_{t=1}^{T} u_t^{X_t} d_t^{1-X_t}\right)$$
$$V_t(k) = e^{-r_t}\left[q_{u,t} V_{t+1}(k+1) + q_{d,t} V_{t+1}(k)\right]$$

mit dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ aus (6.2). Das replizierende Portfolio (x_t, y_t) ist gegeben durch

$$x_t(k) = e^{-r_t}\left[u_t V_t(k) - d_t V_t(k+1)\right] / (u_t - d_t)$$
$$y_t(k) = \frac{1}{S_{t-1}}\left[V_t(k+1) - V_t(k)\right] / (u_t - d_t)$$

6.4 Europäische Call-Option im Binomialmodell

Betrachte ein Wertpapier im CRR Modell, d.h. seien $r_t = r$, $u_t = u$ und $d_t = d$ konstant (unabhängig von t) und bezeichne $N_t = \sum_{n=1}^{t} X_t$ die Anzahl der „up"-Bewegungen bis zum Zeitpunkt t. Der Aktienkurs beträgt damit $S_t = S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}$, der diskontierte Aktienkurs ist $\widetilde{S}_t = S_t / B_t = e^{-rt} S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}$.
Unter $\mathbb{Q}$ hat N_t (und damit auch S_t bzw. $\widetilde{S}_t$) eine Binomial-Verteilung

$$\mathbb{Q}\left(S_t = S_0 u^k d^{t-k}\right) = \binom{t}{k} q^k (1-q)^{t-k}, k \in \{0, \dots, t\}, t = 1, \dots, T\,.$$

Der betrachtete Claim sei eine europäische Call-Option mit Ausübungspreis K zum Zeitpunkt T, der Payoff lautet also $h = (S_T - K)^+$. Nach der bisherigen Theorie ist der arbitragefreie Preis C_0 von h zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}(S_T - K)^+\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\widetilde{S}_T - e^{-rT} K\right)^+\right]\,.$$

Die Option ist „in the money“ genau dann, wenn

$$S_T \geq K \Leftrightarrow S_0 u^{N_T} d^{T-N_T} \geq K \Leftrightarrow \left(\frac{u}{d}\right)^{N_T} \geq \frac{K}{S_0 d^T} \Leftrightarrow N_T \geq n_k = \left\lceil \frac{\log(K/S_0 d^T)}{\log(u/d)} \right\rceil$$

Der Wert der Option beträgt damit

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{n=n_k}^{T} \left(S_0 u^n d^{T-n} - K\right) \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}$$

Bemerkung 6.7. Die rekursive Berechnung wie im letzten Abschnitt und die direkte Berechnung über den gesamten Erwartungswert sind aufgrund der Linearität des Erwartungswerts äquivalent.

6.5 Verteilung des Maximums im Binomialmodell (Reflection Principle)

Betrachte den Spezialfall $u \cdot d = 1$, d.h. „up“ und „down“ heben sich genau auf, womit der Aktienkurs sich vereinfacht zu

$$S_t = S_0 u^{2N_t - t}.$$

Definiere $Y_T = \max\{S_t : t = 0, 1, \dots, T\}$ mit Werten aus $\left\{S_0, S_0 u, \dots, S_0 u^T\right\}$ als das Maximum des Kurses bis zum Zeitpunkt T.

Ziel. Unser Ziel ist nun die Bestimmung der Verteilung von Y_T, also $\mathbb{P}(Y_T \geq S_0 u^i) = \mathbb{P}(2N_t - t \geq i \text{ für ein } i)$ für $i = 0, 1, \dots, T$.

Bei der Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung werden wir einen sehr nützlichen Trick, das „Reflection Principle“ anwenden, welches uns eine Bijektion zwischen Pfaden liefert, die an einem bestimmten Level gespiegelt sind. Dasselbe Prinzip kann auch z.B. für die Bestimmung des Maximums der Brown'schen Bewegung benutzt werden.

Lemma 6.4 (Verteilung des Maximums im Binomialgitter). *Das Maximum Y_t eines Pfades im Binomialgitter besitzt die Verteilung*

$$\mathbb{P}(Y_t \geq S_0 U^i) = \underbrace{\binom{T}{\frac{T+i}{2}} p^{\frac{T+i}{2}} (1-p)^{\frac{T-i}{2}}}_{=0,\text{ wenn } T+i \text{ ungerade}} + \sum_{n=n^*}^{T} \binom{T}{n} \left[p^n (1-p)^{T-n} + p^{T+i-n} (1-p)^{n-i}\right]$$

mit $n^* = \min\left\{i \in \mathbb{R}, i > \frac{T+i}{2}\right\}$.

Beweis. Betrachte alle Pfade, die $S_0 u^i$ erreichen und definiere $\tau_i = \min\{t : 2N_t - t = i\}$ als den ersten Zeitpunkt, zu dem $S_0 u^i$ erreicht wird. Nach Voraussetzung gilt $\tau_i \leq T$. Wähle $i = 0, \dots T$ fix und betrachte drei disjunkte Fälle für den Endzeitpunkt:

1. $2N_T - T = i$ (nur möglich, wenn $i = T, T-2, T-4, \dots$)
2. $2N_T - T > i$
3. $2N_T - T < i$, aber $Y_t \geq S_0 u^i$

Bei Fall 1 und 2 erreicht der Pfad automatisch $S_0 u^i$. Die Verteilung des Maximums kann daher zerlegt werden in

$$\mathbb{P}(2N_t - t \geq i \text{ für ein } i) = \mathbb{P}(2N_T - T = i) + \mathbb{P}(2N_T - T > i) + \mathbb{P}((2N_T - T < i) \wedge (\tau_i \leq T))$$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Terme lassen sich getrennt bestimmen:

1. $\mathbb{P}(2N_T - T = i) = \mathbb{P}\left(N_T = \frac{1}{2}(i+T)\right) = \binom{T}{\frac{T+i}{2}} p^{\frac{T+i}{2}}(1-p)^{\frac{T-i}{2}}$, wenn $i = T, T-2, T-4, \ldots$, ansonsten 0
2. $\mathbb{P}(2N_T - T > i) = \sum_{n=n^*}^{T} \binom{T}{n} p^n (1-p)^{T-n}$ mit $n^* = \min\left\{i \in \mathbb{R}, i > \frac{T+i}{2}\right\}$
3. Dieser Fall ist komplizierter, da aus der Bedingung für T nicht auf das Maximum geschlossen werden kann. Allerdings werden wir feststellen, dass eine Dualität mit den Pfaden aus Fall 2 besteht, insbesondere eine Bijektion zwischen den Pfaden in 2 und 3:

   Betrachte also einen beliebigen Pfad P^* in 3. Er erreicht nach Definition den Wert $S_0 u^i$, weshalb $\tau_i < T$ gilt. Der Pfad $\widetilde{P}$, der bis zu τ_i mit P^* übereinstimmt und ab dann an $S_0 u^i$ gespiegelt ist (siehe Grafik 6.1), erfüllt $2N_T - T > i$ und liegt daher in 2. Außerdem ist er eindeutig (also die Abbildung injektiv). Auf dieselbe Art können wir jedem Pfad aus Fall 2 einen Pfad aus Fall 3 zuweisen, womit wir eine Bijektion zwischen Fall 2 und 3 haben. Insbesondere hat Fall 2 gleich viele Pfade wie 3.

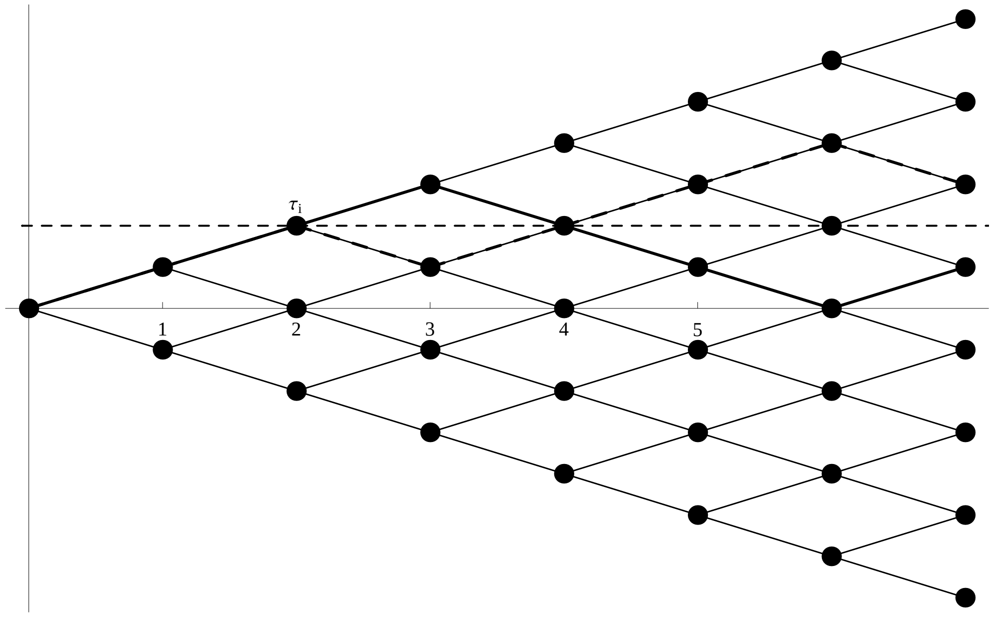


Abbildung 6.1: Das Reflektionsprinzip: Ab der Stoppzeit τ_i wird der Pfad am Level $S_0 u^i$ gespiegelt. Damit erhalten wir eine Bijektion zwischen Pfaden in 2 und 3.

   Betrachte nun einen Pfad aus 2 mit $N_T = n \geq n^*$. Seine Wahrscheinlichkeit ist $p^n(1-p)^{T-n}$ und es gibt $\binom{T}{n}$ derartige Pfade, die bei n enden. Sein Partnerpfad aus 3 endet bei $N_T = T + i - n$ (symmetrisch unter der Schranke $(T+i)/2$) und hat daher die Wahrscheinlichkeit $p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}$. Auch hier gibt es genau $\binom{T}{n}$ verschiedene derartige Pfade wegen der Dualität.
   Damit erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}((2N_T - T < i) \wedge (N_T = T + i - n) \wedge (\tau_i < T)) = \binom{T}{n} p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}$$

$$\mathbb{P}((2N_T - T < i) \wedge (\tau_i < T)) = \sum_{n=n^*}^{T} \binom{T}{n} p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}$$

Insgesamt erhalten wir also genau den Ausdruck im Lemma.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Maximums wird z.B. benötigt für

- Knock-Out/-In Optionen: Dieser Typ von Optionen zahlt nichts (oder nur dann) aus, wenn der Kurs irgendwann eine bestimmte Schranke über- oder unterschreitet.
- Lookback-Optionen: Payoff h ist abhängig vom Maximum (oder Minimum) des Kurses in einem Zeitintervall. Z.B. das Recht, zu T die Aktie zum höchsten Kurs Y_T bis zu diesem Zeitpunkt zu verkaufen. Für die Bewertung wird damit die genau Verteilung des Maximums sowie des Kurses benötigt.

6.5.1 Übungsaufgaben

Bsp. 6.1) Lookback-Option im CRR-Modell mit Payoff $X = (Y_T - K)^+$ (Call) mit $Y_T = max_{0 \leq t \leq T} S_t$. Benutze $u \cdot d = 1$ und bepreise diese Option.

Hinweis: Die Verteilung unter dem risikoneutralen Maß hat dieselbe Verteilung wie die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten, lediglich mit q statt p.

Bsp. 6.2) Knockout-Option im CRR-Modell: Bepreise eine Option mit Strike K und Knockout-Barriere H, $K < H$, $S_0 < H$, mit Payoff

$$X = \begin{cases} (S_t - K)^+ & \text{wenn } Y_T < H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kapitel 7

Markov Modelle

Dieser Abschnitt hält sich in groben Zügen an [Pli97] und [Sch02], für tiefer gehende Theorie zu Markov-Ketten, siehe [Wil91].
Sei $(E, \mathcal{E})$ der Zustandsraum (messbar) und $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{I}}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 7.1. *Ein adaptierter stochastischer Prozess $\{X_t\}$, $X_t : \Omega \to E$, ist ein Markov-Prozess bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{I}}$, wenn*

$$\mathbb{P}\left(X_{t+1} = j | \mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \ldots, X_t)\right) = \mathbb{P}\left(X_{t+1} = j | X_t\right) \forall j \in E, \forall t \in \mathbb{I}\,.$$

$$(\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(X_{t+s} = j | \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{P}\left(X_{t+s} = j | X_t\right) \forall s$$

$$(\Leftrightarrow \forall s, t \in \mathbb{I}, s < t : \mathbb{P}\left(X_t \in F | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{P}\left(X_t \in F | X_s\right) \mathbb{P}\text{-f.s.} \forall F \in \mathcal{E}) \tag{7.1}$$

Bemerkung 7.1. Die Relation (7.1) wird Markov-Eigenschaft genannt.

Interpretation. Die Zukunft X_t hängt von der Vergangenheit $(\mathcal{F}_s)_{s\leq t}$ nur durch den momentanen Zustand X_s ab, nicht durch den gesamten bisherigen Verlauf $\sigma(X_1, \ldots, X_s)$.

Definition 7.2 (homogener bzw. stationärer Markovprozess). *Ein Markov-Prozess heißt <u>homogen</u> oder <u>stationär</u>, wenn*

$$\mathbb{P}\left(X_{t+u} \in F | X_t\right) = \mathbb{P}\left(X_{s+u} \in F | X_s\right) \forall s, t \in \mathbb{I} \forall u\,.$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Zeitschritt können dann als Matrix $\mathbb{P}$ dargestellt werden mit Einträgen

$$\mathbb{P}(i, j) = \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i), i, j \in E\,.$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten für n Zeitschritte ergeben sich als die Einträge der n-ten Matrixpotenz von $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}_{i,j}(n) = (\mathbb{P}^n)_{i,j}$.

Beispiel 7.1. Der Random Walk $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = S_{n-1} + Y_n$ mit $(Y_i)_{i\in\mathbb{R}}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen ist ein (homogener) Markovprozess.

Lemma 7.1. *Die Markoveigenschaft* (7.1) *ist äquivalent zu $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X_t)|X_s]$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $\mathcal{E}$-messbaren Funktionen $g : E \to \mathbb{R}$, die beschränkt oder nicht-negativ sind.*

Beweisskizze.

$\Leftarrow$ Trivial: $g = \mathbb{1}_F \forall F \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow$ Standard-Methode: für charakteristische Funktionen nach Vor. erfüllt $\Rightarrow$ für einfache Funktionen (Treppenfunktionen) durch Linearität des Erwartungswerts erfüllt.

Für beschränkte, messbare $g : E \to \mathbb{R}$ existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{R}}$ mit $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|$ und $g_n \to g$ punktweise. Wegen der dominierten Konvergenz folgt dann

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X_t)|\mathcal{F}_s] \overset{\substack{\text{dom.}\\ \text{Konv.}}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g_n(X_t)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{Markov}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g_n(X_t)|X_s] \overset{\substack{\text{dom.}\\ \text{Konv.}}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X_t)|X_s)]\ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Bei nicht-negativem g benutze stattdessen monotone Konvergenz, allgemeine g lassen sich schließlich als Differenz zweier nicht-negativer Funktionen darstellen.

Bemerkung 7.2. Die Markov-Eigenschaft für $\mathbb{R}^d$-wertige Prozesse ist komponentenweise definiert.

Lemma 7.2. *Sei $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, ein Markov-Prozess. Dann gilt für alle $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$-messbaren $h : E \times E \to \mathbb{R}$, die beschränkt oder nicht-negativ sind, für $s, t \in \mathbb{I}$, $s < t$:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(X_s, X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(X_s, X_t)|X_s]\ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{7.2}$$

(vergleiche (3.35) in Pliska [Pli97])

Beweis. Sei zuerst $h(x, y) = f(x)g(y)$ mit $f, g : E \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathcal{E}$-messbar:

$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(X_s, X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_s)g(X_t)|\mathcal{F}_s] = f(X_s)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X_t)|\mathcal{F}_s] = f(X_s)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X_t)|X_s] = \mathbb{E}[f(X_s)g(X_t)|X_s]$

Sei nun $H = \{h : E \times E \to \mathbb{R} | h \text{ ist } \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}\text{-messbar, beschränkt und erfüllt } (7.2)\}$. H erfüllt:

1. H ist ein Vektorraum.
2. H enthält alle $h(x, y) = f(x)g(y)$ mit $f, g : E \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathcal{E}$-messbar (insbesondere $h = \mathbb{1}_{F\times G}$ mit $F, G \in \mathcal{E}$)
3. Wenn $\{h_n\}_{n\in\mathbb{R}} \subset h$ beschränkt und nicht-negativ mit $h_n \nearrow h$, dann gilt $h \in H$ (über monotone Konvergenz).

Wegen dem Theorem über monotone Klassen (siehe Anhang) enthält H daher alle beschränkten, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$-messbaren $h : E \times E \to \mathbb{R}$. Daher wegen 3 auch alle nicht-negativen h, die $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$-messbar sind.

Bemerkung 7.3. Die Verallgemeinerung auf d Dimensionen erfolgt durch komponentenweise Betrachtung.

Theorem 7.3. *Sei der Preisprozess $\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_T$ ein Markov-Prozess unter $\mathbb{P}$ (mit $E = \mathbb{R}^d$) und arbitragefrei. Dann existiert ein äquivalentes Maß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, sodass $\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_T$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, sowie ein Markov-Prozess unter $\mathbb{Q}$.*

Bemerkung 7.4. Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes folgt aus der Arbitragefreiheit. Dieser Satz sagt aus, das die Markov-Eigenschaft auch unter einem äquivalenten Martingalmaß erhalten bleibt.

Beweis. Die Existenz eines $\mathbb{Q}' \in \mathbb{M}_t^\infty$ folgt nach Dalang-Morton-Willinger.
Definiere $Z_T = d\mathbb{Q}'/d\mathbb{P}$ und $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T|\mathcal{F}_t]$. Für jedes $A \in \mathcal{F}_t$ gilt

$$\mathbb{Q}'(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A Z_T] \overset{\text{bed.EW}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[Z_T|\mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A Z_t]$$

Dies bedeutet, dass Z_t eine Dichte von $\mathbb{Q}'|_{\mathcal{F}_t}$ bezüglich $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ ist.
Da $\mathbb{Q}' \sim \mathbb{P}$, gilt $Z_T > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]$.
<u>Konstruktion von $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$</u>: Definiere $d_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_t}{Z_{t-1}}\middle|\widetilde{S}_t, \widetilde{S}_{t-1}\right]$ für $t = 1, \ldots, T$.
Betrachte $Y_0 = Z_0$ und $Y_t = Z_0 d_1 \cdot \cdots \cdot d_t$ für $t = 1, \ldots, T$. Dann:

1. $d_t > 0$ f.s., daher auch $Y_t > 0$ f.s. $\forall t = 1, \dots, T$
2. d_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar, daher auch Y_t $\forall t = 1, \dots, T$
3. $\mathbb{E}_\mathbb{P}[d_{t+1}|\mathcal{F}_t] \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\underbrace{\mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\Big|\widetilde{S}_{t+1}, \widetilde{S}_t\Big]}_{=h(\widetilde{S}_t,\widetilde{S}_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t\Big] \overset{\text{Lem. 7.2}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{P}[h(\widetilde{S}_t, \widetilde{S}_{t+1})|\widetilde{S}_t] =^1 \mathbb{E}_\mathbb{P}[Z_{t+1}/Z_t|\widetilde{S}_t] \overset{\text{bed.EW}}{=}$ $\mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\underbrace{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[Z_{t+1}/Z_t|\,\mathcal{F}_t\right]}_{=\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}_\mathbb{P}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]\overset{\text{Mart.}}{=}\frac{1}{Z_t}Z_t=1}\big|\widetilde{S}_t\big] = 1$. Daher gilt
$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\underbrace{\frac{Y_{t+1}}{Y_t}}_{d_{t+1}}\Big|\mathcal{F}_t\Big] = 1\,,$$
weshalb Y_t ein $\mathbb{P}$-Martingal ist und daher $\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_T] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_0] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[Z_0] = 1$ erfüllt.

Insgesamt wird also durch $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y_T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ definiert.
<u>Martingaleigenschaft</u> von $(\widetilde{S}_0, \dots, \widetilde{S}_T)$ bezüglich $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_{t+1}\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t]}{\underbrace{\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t]}_{=Y_t}} = \mathbb{E}_\mathbb{P}\big[\underbrace{\frac{Y_{t+1}}{Y_t}}_{d_{t+1}}\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t\big] \overset{\substack{\text{Lemma mit}\\ h(\widetilde{S}_t,\widetilde{S}_{t+1})=\\ d_{t+1}\widetilde{S}_{t+r}}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[d_{t+1}\widetilde{S}_{t+1}|\widetilde{S}_t\right]$$
$$\overset{\substack{\widetilde{S}_{t+1}\text{ ist}\\ \widetilde{S}_{t+1}\text{-mb}}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\middle|\widetilde{S}_t, \widetilde{S}_{t+1}\right]\middle|\widetilde{S}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\widetilde{S}_{t+1}\middle|\widetilde{S}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\Big[\underbrace{\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}_\mathbb{P}[Z_{t+1}\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t]}_{\overset{\text{Bayes}}{=}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t]\overset{\mathbb{Q}'\text{-Mart.}}{=}\widetilde{S}_t}\Big|\widetilde{S}_t\Big]$$
$$= \mathbb{E}_\mathbb{P}[\widetilde{S}_t|\widetilde{S}_t] = \widetilde{S}_t.$$

<u>Markov-Eigenschaft</u> von $(\widetilde{S}_0, \dots, \widetilde{S}_T)$ bezüglich $\mathbb{Q}$: Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar.

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[g(\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_{t+1}g(\widetilde{S}_{t+1})|\mathcal{F}_t]}{\underbrace{\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t]}_{Y_t}} = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\underbrace{d_{t+1}g(\widetilde{S}_{t+1})}_{=:h(\widetilde{S}_t,\widetilde{S}_{t+1})}|\mathcal{F}_t] \overset{\text{Lemma}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{P}[d_{t+1}g(\widetilde{S}_{t+1})|\widetilde{S}_t] = \dots$$
$$\dots = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[g(\widetilde{S}_{t+1})|\widetilde{S}_t]$$

Korollar 7.4. *Der Preis im Zustand $F \in E$ hängt nicht von der Vergangenheit ab, sondern nur vom momentanen Zustand:*
$$\widetilde{S}_t \overset{\textit{Def. MM}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{Q}\big[\widetilde{S}_{t+s}\big|\underbrace{\mathcal{F}_t}_{\substack{\textit{gesamter}\\ \textit{bish. Verlauf}}}\big] \overset{\textit{ME}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{Q}\big[\widetilde{S}_{t+1}\big|\underbrace{\widetilde{S}_t}_{\substack{\textit{Knoten im}\\ \textit{Baum/Gitter}}}\big]\ \forall t, s$$

Beispiel 7.2. Das Binomialmodell ist ein Spezialfall des Markov-Modells.

Bemerkung 7.5 (Faktormodell). Obige Eigenschaften gelten nur für deterministischen Zins r_m. Ist das Bankkonto nicht deterministisch, sondern stochastisch, ist $\widetilde{S}_t$ i.A. keine Markovkette mehr (auch wenn B_t ein Markov-Prozess ist!).
Mögliche Lösung in diesem Fall: Marktmodell mit zugrunde liegendem Faktorprozess X (Markov-Prozess), von dem das Bankkonto abhängt (z.B. Preise aller relevanten Wertpapiere).

[1] Da $\sigma(\widetilde{S}_t) \subset \sigma(\widetilde{S}_t, \widetilde{S}_{t+1})$

Das Bankkonto ist dann definiert durch $f_t : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f_t(X_t) = B_t$, wobei X_t ein entsprechender Sample-Pfad aus Ω ist. Ebenso sind die Wertpapiere in Abhängigkeit vom Markov-Prozess X definiert: $S_t^{(n)} = S_t^{(n)}(X_t)$, wobei $S_t^{(n)}$ nun nicht unbedingt ein Markov-Prozess sein muss.
$\widetilde{S}^{(n)}$ ist nun der Quotient zweier Funktionen des Markov-Prozesses X_t, aber nicht unbedingt selbst ein Markov-Prozess. Nun kann analog wie im Satz vorgegangen werden: X (und nicht $\widetilde{S}$) ist ein Markov-Prozess unter $\mathbb{Q}$ und damit

$$\widetilde{S}_t^{(n)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{S}_{t+s}^{(n)}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_{t+s}^{(n)}|X_t] \ \forall n, t, s\,.$$

Beispiel 7.3. Sei $g_t(x) = S_0 u^x d^{t-x}$, dann ist im Binomialmodell $S_t = g_t(N_t)$, wobei N_t ein Markov-Prozess ist. S_t ist stationär, weil die Übergangswahrscheinlichkeiten konstant sind (mit $X_1, \ldots, X_T$ i.i.d.):

$$\mathbb{P}(S_{t+1} = j|S_t = s) = \begin{cases} p, & \text{wenn } j = su \\ 1-p, & \text{wenn } j = sd \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn $u = \frac{1}{d}$ (anderenfalls liefert eine up und eine down-Bewegung nicht wieder denselben Wert und die Anzahl der möglichen Zustände ist zeitabhängig), dann gibt es $2T+1$ mögliche Zustände.
Martingalbedingungen für $\mathbb{Q}$: Es ist $\widetilde{S}_t = S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}/(1+R)^t$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_{t+1}|\widetilde{S}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 u^{N_{t+1}} d^{t+1-N_{t+1}}/(1+R)^{t+1}|\widetilde{S}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 u^{N_t+X_{t+1}} d^{t-N_t+1-X_{t+1}}/(1+R)^{t+1}|\widetilde{S}_t] \\
&\overset{\substack{N_t \text{ ist} \\ \widetilde{S}_t\text{-mb.}}}{=} S_0 \frac{u^{N_t} d^{t-N_t}}{(1+R)^t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u^{X_{t+1}} d^{1-X_{t+1}}/(1+R)|\widetilde{S}_t] \overset{\text{iid.}}{=} \widetilde{S}_t/(1+R)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u^{X_{t+1}} d^{1-X_{t+1}}] \\
&= \frac{\widetilde{S}_t}{1+R}\left[u\frac{(1+r)-d}{u-d} + d\frac{u-(1+R)}{u-d}\right] = \widetilde{S}_t
\end{aligned}$$

Das Binomialmodell ist also ein Markov-Modell.
Alternativ kann das Binomialmodell auch als ein Faktormodell mit dem Faktorprozess N_t angesehen werden:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_{t+1}|N_t] = \widetilde{S}_t$$

7.1 Übungsaufgaben

Bsp. 7.1) Betrachte das Binomialmodell als Spezialfall eines Faktormodells und zeige, dass $\mathbb{E}[\widetilde{S}_{t+1}|N_t] = \widetilde{S}_t$.

Kapitel 8

Grenzübergang im Binomialmodell: Das Black-Scholes Modell

8.1 Schwache Konvergenz, zentraler Grenzwertsatz in schwacher Formulierung

Sei (S, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{S}$ seine Borel-σ-Algebra.

Definition 8.1 (schwache Konvergenz). *Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{R}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S, \mathcal{S})$ konvergiert schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f d\mu_n = \int_S f d\mu \text{ für alle beschränkten, stetigen } f : S \to \mathbb{R}.$$

Notation. $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu$

Theorem 8.1 (zentraler Grenzwertsatz, o.B.). *Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{R}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Definiere $S_n = X_1 + \dots X_n$. Die Verteilung von*

$$G_n = \frac{S_N - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{VarS_n}}, n \in \mathbb{R}$$

konvergiert schwach gegen die Standard-Normalverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. D.h. für alle beschränkten, stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(G_n)] = \int_R f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\,.$$

Lemma 8.2. *Sei (S, d) ein metrischer Raum, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig (aber nicht unbedingt beschränkt).*

1. *Wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon > 0$ mit*
$$\sup_{n\in\mathbb{R}} \int_{|f|>M_\varepsilon} |f| d\mu_n \le \varepsilon\,,$$
dann gilt $f \in L^1(S, \mathcal{S}, \mu)$ und $\lim_{n\to\infty} \int_S f d\mu_n = \int_S f d\mu$.

2. *Wenn ein messbares $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ existiert mit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty \qquad \textit{und} \qquad \sup_{n\in\mathbb{R}} \int_S \varphi(|f|)d\mu_n < \infty\,,$$

dann gilt 1 auch für f.

Definition 8.2. *Sei (S,d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$. Eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to S$, $n \in \mathbb{R}$ ist schwach konvergent gegen die Zufallsvariable $X : \Omega' \to S$, wenn die Verteilungen $\mu_n = \mathbb{P}X_n^{-1}$, $n \in \mathbb{R}$, schwach gegen $\mu = \mathbb{P}'X^{-1}$ konvergieren, wobei $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ ein anderer Wahrscheinlichkeitsraum sein kann.*

8.2 Reskalierung des Binomialmodells

Ziel. Skalierung des Binomialmodells auf m Schritte der Länge T/m, $T>0$, und Grenzübergang $m\to\infty$, was zu einem stetigen Modell führt.

Betrachte ein Binomialmodell mit:

1. Zinsrate r_m: $e^{rT} = (e^{r_m})^m \Rightarrow r_m = \frac{rT}{m}$
2. Schritt nach oben: $u_m = e^{\frac{rT}{m}}\left(1+\alpha\sqrt{\frac{T}{m}}\right)$ mit geeignetem $\alpha>0$. Die Größe des Schrittes $\alpha\sqrt{T/m}$ ist also proportional zur Wurzel aus dem Zeitschritt, $\sqrt{\Delta t}$.
3. Schritt nach unten: Wähle $\beta \in \left(0, \sqrt{\frac{m}{T}}\right)$ und $d_m = e^{\frac{rT}{m}}\left(1-\beta\sqrt{\frac{T}{m}}\right)$.

Das Martingalmaß $\mathbb{Q}$ dieses Binomialmodells mit m Schritten, in dem die $X_1,\dots,X_m$ unabhängige, identisch verteilte Bernoulli-Variablen sind, lautet

$$\mathbb{Q}(X_i=1) = q = \frac{e^{r_m}-d_m}{u_m-d_m} = \frac{e^{r_m}\beta\sqrt{\frac{T}{m}}}{e^{r_m}(\alpha+\beta)\sqrt{\frac{T}{m}}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \text{ für } i=1,\dots,m$$

Notation. $\sigma = \sqrt{\alpha\beta}$ wird Volatilität genannt.

Insgesamt haben wir also 4 Parameter α, β, q und σ, von denen 2 frei wählbar sind.
Wenden wir nun eine Taylor-Approximation auf $\log u_m$ und $\log d_m$ an:

$$\begin{aligned}
\log u_m &= \frac{rT}{m} + \alpha\sqrt{\frac{T}{m}} - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{T}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)\\
\log d_m &= \frac{rT}{m} - \beta\sqrt{\frac{T}{m}} - \frac{1}{2}\beta^2\frac{T}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\log\frac{u_m}{d_m} = \log u_m - \log d_m = (\alpha+\beta)\sqrt{\frac{T}{m}} - \frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)\frac{T}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)$$

Betrachte den diskontierten Aktienpreis nach m Schritten der Größe $\frac{T}{m}$:

$$\widetilde{S}_m = S_0 \underbrace{e^{-rT}}_{(e^{-r_m})^m} u_m^{N_m} d_m^{m-N_m} = S_0 e^{-rT} \exp\left(\underbrace{N_m}_{=\sum X_i} \log \frac{u_m}{d_m} + m \log d_m \right)$$

$$\overset{\text{einfügen}}{=} S_0 e^{-rT} \exp\Bigg(\underbrace{\frac{N_m - \overbrace{mq}^{\mathbb{E}[N_m]}}{\underbrace{\sqrt{mq(1-q)}}_{\sqrt{\operatorname{Var} N_m}}}}_{=:N_m^* \text{ ... ZV}} \underbrace{\sqrt{m}\sqrt{q(1-q)} \log \frac{u_m}{d_m}}_{(\triangle)} + \underbrace{mq \log \frac{u_m}{d_m} + m \log d_m}_{(\square)} \Bigg)$$

Die einzelnen Terme berechnen sich durch Einsetzen der Definitionen und der Taylor-Approximation zu

$$\begin{aligned}
(\triangle) &= \sqrt{m}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left[(\alpha+\beta)\sqrt{\frac{T}{m}} - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\frac{T}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right) \right] \\
&= \underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_{\sigma} \left[\sqrt{T} - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\frac{T}{\sqrt{m}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right) \right] \\
(\square) &= mq \log \frac{u_m}{d_m} + m \log d_m = mq \log u_m + m(1-q) \log d_m \\
mq \log u_m &= rTq + q\alpha\sqrt{Tm} - \frac{\alpha^2}{2} qT + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \\
m(1-q) \log d_m &= rT(1-q) - \beta(1-q)\sqrt{Tm} - \frac{1}{2}\beta^2(1-q)T + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_m &= S_0 \exp(-rT) \exp\left(N_m^* \sigma \left[\sqrt{T} - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\frac{T}{\sqrt{m}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right) \right] + rT + \sqrt{Tm}\,(q\alpha - \beta(1-q)) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{T}{2}\left(\alpha^2 q + \beta^2(1-q)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) \\
&= S_0 \exp\left(N_m^* \sigma \sqrt{T} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) + \sqrt{Tm} \underbrace{\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta\alpha}{\alpha+\beta} \right)}_{=0} - \frac{T}{2} \underbrace{\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2\alpha}{\alpha+\beta} \right)}_{=\alpha\beta\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}=\sigma^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) \\
&= S_0 \exp\left(N_m^* \sigma \sqrt{T} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) - \frac{T}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right)
\end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt $N_m^* \xrightarrow[m\to\infty]{\text{w}} W_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Daher

$$\sqrt{T} N_m^* \xrightarrow[m\to\infty]{\text{w}} W_T \sim \mathcal{N}(0,T)\,.$$

Außerdem gilt $N_m^* \sigma \sqrt{T} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{L^2,\mathbb{P}} 0$ und daher

$$N_m^* \sigma \sqrt{T} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{\text{w}} \sigma W_T$$

Insgesamt

$$\widetilde{S}_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{w}} S_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) \tag{8.1}$$

Korollar 8.3. *Der diskontierte Preis zur Zeit t im skalierten Binomialmodell mit m Zeitschritten der Größe $\frac{T}{m}$ konvergiert schwach (bzw. in der Verteilung) gegen die geometrische Brown'sche Bewegung $S_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$ zur Zeit T.*

8.3 Die Black-Scholes-Formel

Konvergenzsätze auf Europäische Call-Option angewendet:
Mit $\mu_m = \mathbb{Q}\widetilde{S}_m^{-1}$ und $\mu = \mathbb{P}'\left(S_0 \exp\left(\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^{-1}$ haben wir gerade $\mu_m \xrightarrow{\text{w}} \mu$ gezeigt für $m \to \infty$.
Wenn $f(x) = \left(x - e^{-rT}K\right)^+$ (Payoff des Calls), $x \in \mathbb{R}$, die Bedingungen des Punktes 2 des Lemmas 8.2 erfüllt, dann ist:

$$C_{(m)} = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\widetilde{S}_m - e^{-rT}K\right)^+\right]}_{\text{Preis im Binomialmodell}} = \int_{\mathbb{R}} \left(x - e^{-rT}K\right)^+ d\mu_m$$

$$\xrightarrow[\text{Lemma 8.2}]{\text{w}} \int_{\mathbb{R}} \left(x - e^{-rT}K\right)^+ d\mu = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}\left[\left(S_0 \exp\left(\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - e^{-rT}K\right)^+\right]}_{\text{Call-Optionspreis im Modell mit geom. BB}}$$

f ist stetig, aber unbeschränkt. Allerdings erfüllt es die Bedingungen des Punktes 2 von Lemma 8.2 mit messbarem $\varphi(x) = x^2$, welches auch $\frac{\varphi(x)}{x} = x \to \infty$ erfüllt.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(|f|) d\mu_m &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f^2}_{\leq x^2} d\mu_m \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_m^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_0^2 e^{-2rT} u_m^{2N_m} d_m^{2m-2N_m}\right] \\
&= S_0^2 e^{-2rT} \underbrace{\sum_{n=0}^{m} u_m^{2n} d_m^{2m-2n} \underbrace{\binom{m}{n} q^n (1-q)^{m-n}}_{\text{Binomialvert. unter } \mathbb{Q}}}_{=(qu_m^2+(1-q)d_m^2)^m \text{ wegen Binomialformel}} \\
&= S_0^2 e^{-2rT} \left(q e^{\frac{2rT}{m}} \left(1 + \alpha\sqrt{\frac{T}{m}}\right)^2 + (1-q) e^{\frac{2rT}{m}} \left(1 - \beta\sqrt{\frac{T}{m}}\right)^2\right)^m \\
&= S_0^2 e^{-2rT} e^{2rT} \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1 + 2\alpha\sqrt{\frac{T}{m}} + \alpha^2 \frac{T}{m}\right) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - 2\beta\sqrt{\frac{T}{m}} + \beta^2\frac{T}{m}\right)\right)^m \\
&= S_0^2 \frac{\left(\alpha + \beta + \alpha^2\beta\frac{T}{m} + \alpha\beta^2\frac{T}{m}\right)^m}{(\alpha+\beta)^m} = S_0^2 \left(1 + \frac{T}{m}\underbrace{\alpha\beta}_{\sigma^2}\right)^m \nearrow_{m\to\infty} S_0 \exp\left(\sigma^2 T\right) =: L < \infty
\end{aligned}$$

Damit ist also das Lemma 8.2, Punkt 1, anwendbar und das Black-Scholes-Modell ergibt sich tatsächlich als Grenzwert des Binomialmodells.

8.3.1 Ableitung der Black-Scholes-Formel

Im Modell mit geometrischer Brown'scher Bewegung ist die Option „in the money“ $\Leftrightarrow$

$$S_0 \exp\left(\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \geq e^{-rT}K \Leftrightarrow \sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \geq \log K/(e^{rT}S_0) \Leftrightarrow W_T \geq -\sqrt{T} d_2$$

mit $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(-\log\frac{e^{-rT}K}{S_0} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{e^{-rT}K} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$. Daher gilt

$$
\begin{aligned}
C &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}\left[\left(S_0\exp\left(\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - e^{-rT}K\right)^+\right] \\
&= \int_{-\sqrt{T}d_2}^{\infty}\left(S_0\exp\left(\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - e^{-rT}K\right)^+ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{T}\right)}_{\mathcal{N}(0,T)} dy \\
&= \left|\begin{matrix} x = \frac{y}{\sqrt{T}} \\ dx = \frac{dy}{\sqrt{T}} \end{matrix}\right| = S_0\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Bigg(\underbrace{\sigma x\sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}x^2}_{=-\frac{1}{2}\left(x-\sigma\sqrt{T}\right)^2}\Bigg)dx - \underbrace{\int_{-d_2}^{\infty}Ke^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}ds}_{Ke^{-rT}(1-\Phi(-d_2))=Ke^{-rT}\Phi(d_2)} \\
&= \left|\begin{matrix} z = \sigma\sqrt{T} - x \\ dz = -dx \end{matrix}\right| = S_0\underbrace{\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz}_{\Phi(d_1)} - Ke^{-rT}\Phi(d_2)
\end{aligned}
$$

mit $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{e^{-rT}K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$.

Ergebnis 1 (Black-Scholes-Formel). Der Preis einer europäischen Call-Option im Black-Scholes Modell ist

$$C = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

mit

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{e^{-rT}K} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{e^{-rT}K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right).
\end{aligned}
$$

Bei dieser Formel ist nicht so sehr der genaue Wert von d_1 und d_2 (symmetrisch um $\log\frac{S_0}{e^{-rT}K}$!), als vielmehr die allgemeine Form interessant.

Kapitel 9

Amerikanische Optionen im diskreten Modell

Dieses Kapitel richtet sich zu einem großen Teil nach Lamberton und Lapeyre [LL96].

Definition 9.1 (Amerikanische Optionen). *Eine amerikanische Option mit Ausübungszeitpunkt $T \in \mathbb{R}$ kann zu jedem Zeitpunkt $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ ausgeübt werden. Der Payoff zu t ist Z_t, wobei $\{Z_t\}_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ ein nicht-negativer, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$-adaptierter Prozess ist.*

Beispiel 9.1.

1. Amerikanische Call-Option, Strike K, Payoff $Z_t = (S_t - K)^+$
2. Amerikanische Put-Option, Strike K, Payoff $Z_t = (K - S_t)^+$

Ziel. Zusätzlich zur Bestimmung des fairen Preises wie bei Europäischen Optionen (die nur zu einem fixen Zeitpunkt T ausgeübt werden konnten), stellt sich bei amerikanischen Optionen auch die Frage nach dem optimalen Zeitpunkt der Ausübung (als Stoppzeit; zu t muss entschieden werden können, ob die Option jetzt ausgeübt werden soll).

Betrachte den Preis $\{U_t\}_{0\leq t\leq T}$ der Option, basierend auf dem Payoff $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$. Zum Zeitpunkt T ist der Preis trivialerweise gleich dem Payoff:

$$U_T = Z_T$$

Sei $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}_t^\infty$ ein Martingalmaß. Dann ist $B_{T-1}\mathbb{E}_\mathbb{Q}[U_T/B_T|\mathcal{F}_{T-1}]$ ein fairer Preis zum Zeitpunkt $T-1$ des Payoffs (zu T). Allerdings hat man zum Zeitpunkt $T-1$ auch die Wahl, die Option gleich auszuüben, wenn dies zu einem besseren Ergebnis führt. Daher ergibt sich also der Preis zu $T-1$ der Option als

$$U_{T-1} = \max\Bigg\{ \underbrace{Z_{T-1}}_{\text{Ausübung zu } T-1}, \underbrace{B_{T-1}\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{U_T}{B_T}\middle| \mathcal{F}_{T-1}\right]}_{\text{warten}} \Bigg\}$$

Induktiv erhält man aufgrund derselben Argumentation für jeden Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots, T-1$ den Preis

$$U_t = \max\left\{Z_t, B_t\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{U_{t+1}}{B_{t+1}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\}$$

Ergebnis 2. Für den diskontierten Preis $\widetilde{U}_t = U_t/B_t$ einer amerikanischen Option mit diskontiertem Payoff $\widetilde{Z}_t = Z_t/B_t$ gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_T &= \widetilde{Z}_T\\ \widetilde{U}_t &= \max\left\{\widetilde{Z}_t, \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\widetilde{U}_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\}.\end{aligned}$$

9.1 Die Snell-Envelope (Snell'sche Einhüllende)

Definition 9.2 (Snell'sche Einhüllende). *Sei $\{Z_t\}_{t\leq T}$ ein adaptierter Prozess. Die Snell'sche Einhüllende (Envelope) $\{U_t\}_{t\leq T}$ ist definiert durch*

$$U_t = \begin{cases} Z_t, & \text{wenn } t = T \\ \max\{Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\} & \text{für } t \in \{0,\dots,T-1\} \end{cases}$$

Lemma 9.1. *$\{U_t\}_{t\leq T}$ ist das kleinste $\mathbb{P}$-Supermartingal, das $\{Z_t\}_{t\leq T}$ dominiert.*

Beweis.
- Da nach Definition $U_t \geq Z_t\ \forall t \leq T$ gilt, ist U dominierend.
- Weiters gilt nach Definition $U_t \geq \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]$, womit U ein Supermartingal ist.
- Sei nun $\{V_t\}_{t\leq T}$ ein dominierendes Supermartingal von $\{Z_t\}_{t\leq T}$. Wir werden induktiv zeigen, dass V das Supermartingal U dominiert. Es ist nach Definition $V_T \geq Z_T = U_T$. Wenn $V_{t+1} \geq U_{t+1}$, dann gilt

$$\left.\begin{array}{r} V_t \overset{\substack{\text{Super-}\\\text{Mart.}}}{\geq} \mathbb{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] \text{ f.s.} \\ V_t \geq Z_t \end{array}\right\} V_t \geq \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) = U_t$$

Damit dominiert nach Rückwärtsinduktion V_t also U_t und $\{U_t\}_{t\leq T}$ ist das kleinste Supermartingal, das Z dominiert.

Lemma 9.2. *$\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$ ist eine Stoppzeit und die gestoppte Folge $\{U_{t\wedge\tau_0}\}_{t\leq T}$ ist ein Martingal.*

Beweis. a) Da $U_T = Z_T$ gilt, ist τ_0 wohldefiniert und $\tau_0 \in \{0,\dots,T\}\,\forall \omega \in \Omega$. Es ist weiters $\{\tau_0 \leq t\} = \bigcup_{n=0}^{t}\{Z_n = U_n\} \in \mathcal{F}_t \forall t \in \{0,\dots,T\}$, womit τ_0 eine Stoppzeit ist.

b) Für die Martingaleigenschaft schreibe für $t \in \{0,\dots,T\}$

$$U_{t+1}^{\tau_0} = U_{t+1\wedge\tau_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{t+1} H_j(U_j - U_{j-1}),$$

wobei $H_j = \mathbb{1}_{\{\tau_0 \geq j\}}$. Beachte, dass $\{\tau_0 \geq j\} = \Omega/\{\tau_0 \leq j-1\} \in \mathcal{F}_{t-1}$, d.h. H_j ist vorhersagbar. Da $U_t > Z_t$ auf $\{\tau_0 \geq t+1\}$, gilt $U_t = \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ f.s. zu diesen Zeiten. Daher ist

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = H_{t+1}(U_{t+1} - U_t) = H_{t+1}(U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]).$$

Da H_{t+1} $\mathcal{F}_t$-messbar ist, gilt

$$\mathbb{E}\left[U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0}\middle|\mathcal{F}_t\right] = H_{t+1}\underbrace{\mathbb{E}[U_{t+1} - \mathbb{E}[E_{t+1}|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t]}_{=0} = 0$$

und $U_t^{\tau_0}$ ist ein Martingal.

Bemerkung 9.1. Seit $\tau : \Omega \to I$ eine Stoppzeit mit $I = \{0,\dots,T\}$ oder $I = \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. Wenn $\{X_t\}_{t\in I}$ adaptiert ist, dann ist auch $\{X_t^\tau\}_{t\in I}$ adaptiert.

2. Wenn $\{X_t\}_{t\in I}$ ein Martingal ist, dann ist auch $\{X_t^\tau\}_{t\in I}$ ein Martingal.
3. Wenn $\{X_t\}_{t\in I}$ ein Sub-/Supermartingal ist, dann ist auch $\{X_t^\tau\}_{t\in I}$ ein Sub-/Supermartingal.

Definition 9.3. *Für $T \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$ sei $\mathcal{T}_{t,T}$ die Menge der Stoppzeiten mit Werten aus $\{t, \dots, T\}$.*

Definition 9.4. *Eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ heißt optimal für die adaptierte Folge $\{Z_t\}_{t\leq T}$, wenn $\mathbb{E}[Z_{\tau_0}|\mathcal{F}_0] = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_0]$ f.s.*

Korollar 9.3. *Die Stoppzeit $\tau_0 = \inf\{\tau \geq 0 | U_\tau = Z_\tau\}$ ist optimal für $\{Z_t\}_{t\leq T}$ und $U_0 = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}|\mathcal{F}_0]$ f.s.*

Beweis.

$$U_0 = U_0^{\tau_0} \overset{\text{Mart.}}{=} \mathbb{E}[U_N^{\tau_0}|\mathcal{F}_0] \overset{\substack{\text{Def.}\\ \text{Stoppz.}}}{=} \mathbb{E}[U_{\tau_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}|\mathcal{F}_0] \text{ f.s.}$$

Seit $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ eine Stoppzeit. Dann ist U^τ ein Supermartingal (Bew: Übung) und daher

$$U_0 \geq \mathbb{E}[U_N^\tau|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_0] \quad \Rightarrow \quad \tau_0 \text{ ist optimal}$$

Bemerkung 9.2. Verallgemeinerung: Für $n \in \{0, \dots, T\}$ ist $\tau_n = \inf\{n \leq \tau \leq T : U_\tau = Z_\tau\}$ eine optimale Stoppzeit für $\{Z_t\}_{t\leq T}$ mit $U_n = \mathbb{E}[Z_{\tau_n}|\mathcal{F}_n]$.

Theorem 9.4. *Eine Stoppzeit τ ist optimal für die adaptierte Folge $\{Z_t\}_{t\leq T}$ mit Snell'scher Envelope $\{U_t\}_{t\leq T}$ dann und nur dann, wenn $Z_\tau = U_\tau$ f.s. und $\{U_t^\tau\}_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal ist.*

Beweis.

$\Leftarrow$ $U_0 = U_0^\tau \overset{\text{Mart.}}{=} \mathbb{E}[U_T^\tau|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_0]$. Da $U_0 = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}|\mathcal{F}_0]$ mit τ_0 optimal, ist auch τ eine optimale Stoppzeit.

$\Rightarrow$ **Z.z.** $Z_\tau = U_\tau$**:** Sei τ optimal. Dann gilt $\mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_0] \overset{\substack{\text{Super-}\\ \text{Mart.}}}{\geq} U_0$. Daher gilt $\mathbb{E}[Z_\tau|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_0]$ und wegen $Z_\tau \leq U_\tau$ f.s. folgt $Z_\tau = U_\tau$ f.s.

Z.z. U_t^τ **ist ein Martingal:** Da U_t^τ ein Supermartingal ist, gilt

$$U_0 \geq \mathbb{E}[U_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[U_{\tau\wedge T}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_0] = U_0 \text{ f.s.}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[U_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_t|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_0] \text{ f.s.}$$

Da $U_{\tau\wedge t} \geq \mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_t]$ f.s. (Supermartingal), gilt nun insgesamt $U_{\tau\wedge t} = \mathbb{E}[U_\tau|\mathcal{F}_t]$ und U_t^τ ist ein Martingal.

9.2 Zerlegung von Supermartingalen

Lemma 9.5 (Doob'sche Zerlegung). *Jedes Supermartingal $\{U_t\}_{t\leq T}$ hat die eindeutige Zerlegung*

$$U_t = M_t - A_t \tag{9.1}$$

mit einem Martingal $\{M_t\}$ und einem nicht-fallenden, vorhersagbaren Prozess $\{A_t\}$ mit $A_0 = 0$.

Beweis. Für $t = 0$ gilt $M_0 = U_0$, $A_0 = 0$. Definiere nun rekursiv

$$\left.\begin{aligned} M_{t+1} &= M_t + U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] \\ A_{t+1} &= A_t + (U_t - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_{t+1} - A_{t+1} = M_t - A_t + U_{t+1} - U_t = U_{t+1}$$

Wie leicht zu sehen ist, ist M_{t+1} ein Martingal und A_{t+1} ist nicht fallend, weil $\{U_t\}_{t\leq T}$ ein Supermartingal ist.
Sei nun $U_t = \widetilde{M_t} - \widetilde{A}_t$, $t \in \{0, \dots, T\}$ eine andere Zerlegung. Dann ist $\widehat{M_t} = M_t - \widetilde{M_t} = A_t - \widetilde{A}_t$ ein vorhersagbares Martingal mit $\widehat{M_0} = 0$.
Da $\widehat{M_t} \overset{\text{vorhers.}}{=} \mathbb{E}[\widehat{M_t}|\mathcal{F}_{t-1}] \overset{\text{Mart.}}{=} \widehat{M}_{t-1}$, ist $\widehat{M_t} = 0$ für alle t und die Zerlegung ist eindeutig.

Theorem 9.6. *Die größte optimale Stoppzeit τ_{max} für einen adaptierten Prozess $\{Z_t\}_{t\leq T}$ ist*

$$\tau_{max} = \begin{cases} T, & \textit{wenn } A_T = 0 \\ \inf\{t|A_{t+1} \neq 0\} & \textit{sonst} \end{cases}$$

mit der Doob'schen Zerlegung $Z_t = M_t - A_t$.

Beweis.

1. A ist vorhersagbar $\Rightarrow$ $\tau_{\max}$ ist eine Stoppzeit (folgt aus der Definition)
2. $A_{\tau_{\max}} = 0 \Rightarrow U^{\tau_{\max}} = M^{\tau_{\max}} \Rightarrow$ Die gestoppte Schnell'sche Einhüllende ist ein Martingal
3. Optimalität: Zu zeigen ist $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$ f.s.
   Es gilt
   $$U_{\tau_{\max}} = \sum_{j=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{\tau_{\max}=j\}} U_j + \mathbb{1}_{\{\tau_{\max}=T\}} U_T = \sum_{j=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{\tau_{\max}=j\}} \max\{Z_j, \mathbb{E}[U_{j+1}|\mathcal{F}_t]\} + \mathbb{1}_{\{\tau_{\max}=T\}} U_T$$
   Nach der Definition ist $M_t - A_{t+1} = M_t - A_t - U_t + \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]$, sowie $A_{j+1} > 0$ in der Menge $\{\tau_{\max} = j\} = \{A_j = 0, A_{j+1} > 0\}$. Daher
   $$\mathbb{E}[U_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_t - A_{t+1} < M_t = M_t - A_t = U_t \underset{\text{Snell Env.}}{\overset{\text{Def. von}}{\Longrightarrow}} U_t = Z_t$$
   $$\Rightarrow U_{\tau_{\max}} = \sum_{j=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{\tau_{\max}=j\}} Z_j + \mathbb{1}_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T = Z_{\tau_{\max}}$$
4. $\tau_{\max}$ ist die größte Stoppzeit: Annahme, es gäbe eine Stoppzeit $\tau \geq \tau_{\max}$ mit $\mathbb{P}(\tau > \tau_{\max}) > 0$. Dann gälte
   $$\mathbb{E}[U_\tau] = \mathbb{E}[M_\tau] - \mathbb{E}[A_\tau] = \mathbb{E}[U_0] - \underbrace{\mathbb{E}[A_\tau]}_{>0} < \mathbb{E}[U_0]\,.$$
   Damit wäre $\{U_t\}_{t\leq T}$ kein Martingal und aufgrund dieses Widerspruchs ist $\tau_{\max}$ die größte Stoppzeit.

9.3 Anwendung auf Amerikanische Optionen

Die diskontierten Preise $\left\{\widetilde{U}_t\right\}$ sind die Snell'sche Einhüllende der diskontierten Payoffs $\left\{\widetilde{Z}_t\right\}$. Nach der Doob'schen Zerlegung ist $\widetilde{U}_t = \widetilde{M}_t - \widetilde{A}_t$ für $t = 0, \ldots, T$.
Die letzten beiden Abschnitte liefern uns nun Schranken für die optimale Ausübungszeit der Amerikanischen Option: Die Option soll zwischen $\tau_0 = \min\left\{0 \leq t \leq T | \widetilde{U}_t = \widetilde{Z}_t\right\}$ und $\tau_{\max} = T$ für $\widetilde{A}_T = 0$ bzw. $\tau_{\max} = \min\left\{0 \leq t \leq T | \widetilde{A}_{t+1} > 0, \widetilde{A}_t = 0\right\}$ ausgeübt werden (optimale Stoppzeit).

Bemerkung 9.3. Wichtig für das Hedgen von Amerikanischen Optionen ist die Tatsache, dass der gestoppte Prozess ein Martingal ist (da $\widetilde{A}_t = 0$ für $t \leq \tau$). Dafür existiert nun eine Handelsstrategie H, die den Payoff erzeugt und damit zum Hedgen benutzt werden kann.

9.4 Zusammenhang der Preise von Amerikanischen und Europäischen Optionen

Da bei Amerikanischen Optionen im Vergleich zu Europäischen Optionen mehr Ausübungszeitpunkte möglich sind, der Zeitpunkt T aber auch immer erlaubt ist, kann der Preis einer Amerikanischen Option nicht kleiner sein als der Preis einer Europäischen Option mit denselben zugrunde liegenden Werten. Andererseits werden wir aber gleich sehen, dass es sehr wohl Fälle gibt, wo diese zusätzlichen Ausübungsmöglichkeiten keine Verbesserung im Vergleich zur Europäischen Option liefern. Dies ist etwa bei Standard Call-Optionen der Fall.

Lemma 9.7. *Seien $\{U_t\}_{t \leq T}$ die Preise einer Amerikanischen Option mit Payoff $\{Z_t\}_{t \leq T}$ und $\{C_t\}$ die Preise einer Europäischen Option mit Payoff Z_T zum Zeitpunkt T.
Dann gilt $U_t \geq C_t$ f.s. $\forall t = 0, \ldots, T$ und aus $C_t \geq Z_t \forall t$ folgt $U_t = C_t \forall t$ f.s.*

Beweis. Sei $\mathbb{Q}$ ein Martingalmaß. $\left\{\widetilde{U}_t\right\}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Supermartingal, $\left\{\widetilde{C}_t\right\}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal und $\widetilde{U}_T = \widetilde{C}_T = \widetilde{Z}_T$. Daher gilt $\widetilde{U}_t \geq \mathbb{E}[\widetilde{U}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\widetilde{C}_T | \mathcal{F}_t] = \widetilde{C}_t \forall t$ f.s.
Wenn $C_t \geq Z_t$, so auch $\widetilde{C}_t \geq \widetilde{Z}_t$, das Martingal $\widetilde{C}_t$ dominiert also $\widetilde{Z}_t$. Da $\widetilde{U}_t$ das kleinste Supermartingal ist, das $\widetilde{Z}_t$ dominiert, gilt $\widetilde{U}_t \leq \widetilde{C}_t$, gemeinsam mit der ersten Aussage des Lemmas also $\widetilde{U}_t = \widetilde{C}_t$.

Lemma 9.8. *Sei das Bankkonto $\{B_t\}$ eine deterministische, nicht fallende Folge. Dann sind die Preise einer Europäischen und einer Amerikanischen Call-Option äquivalent.*

Beweis. Sei $\mathbb{Q}$ ein Martingalmaß. Der Payoff zur Zeit t ist $Z_t = (S_t - K)^+$. Damit

$$\widetilde{C}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\left(\widetilde{S}_T - K/B_T\right)^+ | \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_T - K/B_T | \mathcal{F}_t] \underset{B_T \text{ determ.}}{\overset{\text{Mart.maß}}{=}} \widetilde{S}_t - K/B_T$$

Daher ist $C_t \geq S_t - KB_t/B_T \geq S_t - K$ sowie $C_t \geq 0$, insgesamt also $C_t \geq (S_t - K)^+$. Der Beweis folgt nun unmittelbar aus dem vorigen Lemma 9.7

Bemerkung 9.4. Die Äquivalenz der Preise von Europäischen und Amerikanischen Optionen bei deterministischem Zins gilt nur für Call-Optionen, bei Put-Optionen gilt sie z.B. nicht mehr!

9.4.1 Übungsaufgaben

Bsp. 9.1) Sei $\tau : \Omega \to I$ eine Stoppzeit mit $I = \{0, \ldots, T\}$ oder $I = \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Ist $\{X_t\}_{t \in I}$ adaptiert, dann ist auch $\{X_t^\tau\}_{t \in I}$ adaptiert.
(b) Ist $\{X_t\}_{t \in I}$ ein Martingal, dann ist auch $\{X_t^\tau\}_{t \in I}$ ein Martingal.
(c) Ist $\{X_t\}_{t \in I}$ ein Sub-/Supermartingal, dann ist auch $\{X_t^\tau\}_{t \in I}$ ein Sub-/Supermartingal.

Kapitel 10

Optimale Portfolios und Martingalmethoden

Großteils nach Pliska [Pli97, Kap. 5.2 und 5.4]
Betrachte eine Nutzenfunktion $u(w, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ (differenzierbar, konkav, streng monoton steigend). Das Anfangskapital ν sei gegeben.

Problem 3. *Finde eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit Anfangswert $V_0 = \nu$ mit*

$$\max \mathbb{E}[u(V_T)] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) u(V_T(\omega), \omega)$$
$$\textit{unter } V_0 = \nu, H \in \mathbb{H}$$

Problem 4 (äquivalente Formulierung).

$$\max \mathbb{E}[u(B_T(\nu + \widetilde{G}_T))]$$
$$\textit{unter } H \in \mathbb{H}_p^- \textit{ (vorhersagbare Handelsstrategie in } \mathbb{R}^T\textit{)}$$

Definition 10.1. *Die Menge aller mit dem Anfangskapital ν erreichbaren Kapitale sei $\mathbb{W}_\nu = \left\{W \in \mathbb{R}^k : \exists H \in \mathbb{H} \text{ mit } V_0 = \nu\right\}$*

Bemerkung 10.1. Ist das Modell vollständig, so gilt $\mathbb{W}_\nu = \left\{W \in \mathbb{R}^k | \mathbb{E}_\mathbb{Q}[W/B_T] = \nu\right\}$.

Problem 5 (alternative Formulierung).

$$\max \mathbb{E}u(W)$$
$$\textit{unter } W \in \mathbb{W}_\nu$$

Die Lösung von Problem 5 erfolgt z.B. mittels Lagrange-Multiplikator:

$$\max \mathbb{E}u(W) - \lambda \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{W}{B_T}\right] = \max \mathbb{E}\left[u(W) - \lambda \frac{W}{B_T} \underbrace{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{P}}}_{=:L}\right] = \max \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \left[u(W(\omega)) - \lambda L(\omega) \frac{W(\omega)}{B_T(\omega)}\right]$$

Die Bedingung erster Ordnung liefert für jedes $\omega \in \Omega$: $u'(W) = \lambda L/B_T$. Sei nun $\widetilde{u} := (u')^{-1}$ die Inverse von u'. Dann ist das optimale W gegeben durch:

$$W(\omega) = \widetilde{u}\left(\lambda \frac{L(\omega)}{B_T(\omega)}\right) \forall \omega \in \Omega\,.$$

Der Wert von λ wird nun so bestimmt, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[W/B_T\right] = \nu = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{u}(\lambda L/B_T)/B_T]$.

Bemerkung 10.2. Aus $W(\omega)$ kann die Handelsstrategie H leicht rückgerechnet werden.

Beispiel 10.1 (Exponentielle Nutzenfunktion). Die Exponentielle Nutzenfunktion ist definiert als $u(W) = a - bc\exp(-W/c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, b, c > 0$.

$$u'(W) = b\exp(-W/c) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{u}(x) = -c\log\frac{x}{b}$$

$$\begin{aligned}\nu = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{u}\left(\frac{\lambda L}{B_T}\right)/B_T\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[-c\log\left(\frac{\lambda L}{B_T b}\right)/B_T\right] &= -c\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{L}{B_T}\left(\log\frac{L}{B_T} + \log\frac{\lambda}{b}\right)\right] \\ &= -c\mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\log\frac{L}{B_T}\right] - c\log\left(\frac{\lambda}{b}\right)\mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\right]\end{aligned}$$

optimales Kapital:

$$W = \widetilde{u}\left(\lambda L/B_T\right) = -c\log\frac{\lambda L}{B_T b} = -c\log\frac{L}{B_T} - c\log\frac{\lambda}{b} = -c\log\frac{L}{B_T} + \frac{\nu + c\mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\log\frac{L}{B_T}\right]}{\mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\right]}$$

optimaler erwarteter Nutzen:

$$\mathbb{E}[u(W)] = a - bc\mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\right]\exp\left(-\frac{\frac{\nu}{c} + \mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\log\frac{L}{B_T}\right]}{\mathbb{E}\left[\frac{L}{B_T}\right]}\right)$$

Beispiel 10.2 (logarithmische Nutzenfunktion).
Nutzenfunktion: $u(W) = \log W$, $u'(W) = \frac{1}{W}$, $\widetilde{u}(x) = \frac{1}{x}$
Bedingung für λ: $\nu = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\lambda L}\right] \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\nu}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{L}\right] = \frac{1}{\nu}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{L}\underbrace{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{P}}}_{=L}\Big] = \frac{1}{\nu}$
optimales Kapital $W = \widetilde{u}(\lambda L/B_T) = \frac{B_T}{\lambda L} = \frac{\nu B_T}{L}$
optimaler Nutzen $\mathbb{E}\left[u(W)\right] = \mathbb{E}\left[\log W\right] = \mathbb{E}\left[\log\nu + \log B_T - \log L\right] = \log\nu - \mathbb{E}\left[\log\frac{L}{B_T}\right]$

10.1 Übungsaufgaben

Bsp. 10.1) Finde explizite Formeln für das optimale Kapital und den optimalen Nutzen unter der quadratischen Nutzenfunktion $u(w) = \alpha + \beta w - w^2/2$, $\beta > 0$.

Bsp. 10.2) Betrachte das CRR-Binomialmodell mit konstanten Faktoren u, d und Zins r und den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten p.

Bei Benutzung der logarithmischen Nutzenfunktion $u(w) = \ln w$ bestimme:

(a) das optimale erreichbare Kapital W,
(b) den optimalen Nutzen $\mathbb{E}u(w)$,
(c) die Handelsstrategie (H_0, H_1), die W erzeugt.

Hinweis: $L(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \left(\frac{q}{p}\right)^n\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-n}$ wegen der Binomialverteilung.

Bsp. 10.3) Betrachte das CRR-Binomialmodell mit konstanten Faktoren u, d und Zins r und den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten p, sowie die quadratische Nutzenfunktion $u(w) = \beta w - w^2/2$.

(a) Zeige, dass für das optimale Kapital gilt

$$W(\omega) = \beta + \frac{(1+R)^T\nu - \beta}{[q^2/p + (1-q)^2/(1-p)]^T} \left(\frac{q}{p}\right)^n \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-n}$$

mit $n = N_t$ der Anzahl der Bewegungen nach oben.

(b) Zeige, dass

$$\mathbb{E}u(w) = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\left[(1+R)^T\nu - \beta\right]^2}{2\left[q^2/p + (1-q)^2/(1-p)\right]^T} .$$

Hinweis: Benutze die Binomialformel!

Stichworte zum Inhalt der Lehrveranstaltung

Das Ein-Perioden-Modell

1. Definitionen
   - Modell, Handelsstrategie, (diskontierter) Wert-, Preisprozess
   - Arbitrage, dominierende Handelsstrategie
   - lineares Preismaß, Zusammenhang zu dom. HS, Gesetz des eindeutigen Preises

2. Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (Martingalmaß)
   - No-Arbitrage Theorem

3. Bewertung von Contingent Claims - attainable CC, replizierendes Portfolio
   - Risikoneutrales Bewertungsprinzip, Beispiele: Optionen
   - Elementar-Claims, Zustandspreise, Linearität des Preises

4. Vollständigkeit
   - Zusammenhang mit Eindeutigkeit des RNM
   - unvollständige Märkte: Schranken für Preis, Sub-/Superhedging

5. Optimale Portfolios, Zulässigkeit
   - Nutzenfunktionen
   - Zusammenhang mit "No Arbitrage", explizite Form eines RNM

Wh. Wahrscheinlichkeitstheorie

- W-Raum, σ-Algebra, W-Maß, ZV, Ereignis, Messbarkeit, endliche σ-Algebren
- absolut stetige Maße, äquivalente Maße, Radon-Nikodym
- Stochastische Prozesse: Filtrierungen, adaptierte Prozesse

Mehr-Perioden-Modell in diskreter Zeit

- Marktmodell: Bankkonto (Numéraire), Asset-Preise, Annahmen
- Handelsstrategien: Wert des Portfolios, selbst-finanzierend
- Diskontierung
- Bewertungsfunktionale: erreichbare Gewinne, Gesetz des eindeutigen Preises
- Dualität Bewertungsfunktionale und Preis (Hahn-Banach, Trennungssatz für Beweis)
- Arbitrage-Freiheit
- Satz von Dalang, Morton, Willinger: äquivalente Bedingungen zu Arbitrage-Freiheit
- vollständige Märkte

Wh. Martingaltheorie

- Bedingte Erwartungen, Eigenschaften
- stochastischer Kern

- Martingale, Doob'sche Zerlegung, Bayes'sche Formel
- Stoppzeiten, Optimal Stopping Theorem, gestoppte Prozesse

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- Sharpe-Ratio
- Portfolio-Optimierungsproblem, Varianz-Optimierung, Mean-variance efficient
- Nutzen-Optimierung, duales Optimierungsproblem, nutzen-indifferente Preise

Das Binomialmodell

- Definition des Modells, Assets, Entwicklung (Baum, Gitter)
- Cox-Ross-Rubinstein Modell
- No Arbitrage Bedingungen
- Bepreisung, Bestimmung des replizierenden Portfolios
- Europäische Call-Option
- Verteilung des Maximums eines Pfades (Reflection Principle)

Markov Modelle

- Definition Markov-Prozesse, Markov-Eigenschaft
- Erhaltung der Markov-Eigenschaft unter äquiv. Martingalmaßen
- Faktormodell bei stochastischem Zins

Grenzübergang Binomialmodell zu Black-Scholes

- Schwache Konvergenz, zentraler Grenzwertsatz
- Reskalierung des BM: Taylor-Approximation, Grenzübergang
- Black-Scholes Formel für Europäische Calls, Herleitung

Amerikanische Optionen

- Definition
- Snell'sche Einhüllende (Envelope)
- optimale Stoppzeit, Zusammenhang mit Snell'scher Envelope
- Zerlegung von Supermartingalen (Doob'sche Zerlegung), Anwendung auf Am. Optionen
- Zusammenhang der Preise von Europ. und Am. Optionen

Optimale Portfolios und Martingalmethoden

Anhang

Das Farkas-Lemma, heutzutage hauptsächlich in der linearen Optimierung benötigt, stammt ursprünglich aus dem Artikel [Far02].

Lemma 10.1 (Farkas-Lemma, [Far02]). *Für jede reelle Matrix A und jeden reellen Vektor b ist von beiden Systemen*

$$Ax = b,\ x \geq 0 \qquad\qquad y^t A \geq 0,\ y^t b > 0$$

stets genau eines lösbar.

Theorem 10.2 (Satz über monotone Klassen, [Wil91, Thm. 3.14]). *Sei $\mathcal{H}$ eine Klasse von beschränkten Funktionen aus einer Menge S nach $\mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

(i) $\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$,

(ii) die konstante Funktion 1 liegt in $\mathcal{H}$ und

(iii) wenn (f_n) eine Folge von nicht-negativen Funktionen in $\mathcal{H}$ ist mit $f_n \nearrow f$ für eine beschränkte Funktion f auf S, dann gilt auch $f \in \mathcal{H}$.

Dann gilt: Wenn $\mathcal{H}$ die Indikatorfunktion jeder Menge eines π-Systems $\mathcal{I}$ (unter endlicher Durchschnittsbildung abgeschlossene Familie von Teilmengen von S) enthält, dann enthält $\mathcal{H}$ jede beschränkte, $\sigma(\mathcal{I})$-messbare Funktion in S.

Theorem 10.3 (Monotone Konvergenz, [Wil91, Thm. 5.3]). *Sei (f_n) eine Folge von Σ-messbaren Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Dann gilt*

$$\mu(f_n) \nearrow \mu(f) \leq \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \int_S f_n(s)\mu(ds) \nearrow \int_S f(s)\mu(ds)\,.$$

Theorem 10.4 (Dominierte Konvergenz, [Wil91, Thm. 5.9]). *Sei (f_n) eine Folge von Σ-messbaren Funktionen und f Σ-messbar mit $f_n(s) \to f(s)$ für alle $s \in \S$. Wenn die Folge (f_n) durch ein $g \in \mathcal{L}^1(S, \Sigma, \mu)^+$ mit $\mu(g) < \infty$ dominiert wird,*

$$|f_n(s)| \leq g(s), \forall s \in S, \forall n \in \mathbb{R},$$

dann gilt $\mu\left(|f_n - f|\right) \to 0$ bzw.

$$\mu(f_n) \to \mu(f) \qquad \text{bzw.} \qquad \int_S f_n(s)\mu(ds) \to \int_S f(s)\mu(ds)\,.$$

Theorem 10.5 (Satz von Bayes). *Seien* $\mathbb{P}$ *und* $\mathbb{Q}$ *zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *eine sub-*σ*-Algebra von* $\mathcal{F}$, $S \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ *und* $f := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. *Dann gilt* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f|\mathcal{G}] > 0$ *f.s. und*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X|\,\mathcal{G}\right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Xf|\mathcal{G}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f|\mathcal{G}]} \text{ f.s.}$$

Literaturverzeichnis

[Far02] Julius Farkas. Theorie der einfachen Ungleichungen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 124(1):1–27, 1902. `http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/contentserver/contentserver?command=docconvert&docid=D261364`.

[FS04] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic finance. An introduction in discrete time*, volume 27 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004.

[LL96] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman & Hall, London, 1996.

[Pli97] Stanley R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.* Cambridge University Press, June 1997.

[Sch02] Uwe Schmock. Mathematical finance, 2002. Vorlesung im Rahmen der Summer School, Perugia.

[Wil91] David Williams. *Probability with martingales.* Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.