Lebensräume - Lebensträume schaffen und absichern

Ein Streifzug durch die Grundlagen aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Reinhold Kainhofer (reinhold@kainhofer.com)

http://reinhold.kainhofer.com

FAM, TU Wien

Wiedner Hauptstr. 8/105-1, 1040 Wien

http://www.fam.tuwien.ac.at/

Pro Scientia, 19. Mai 2004

Inhalt des Vortrags

- Versicherungsmathematik
  - Was ist das? Wofür brauchen wir das überhaupt?
  - Verschiedene Typen von Versicherungen - verschiedene Methoden
  - Man braucht Daten!!!
- Finanzmathematik
  - Was ist das? Kann man überhaupt damit was anfangen?
  - Verschiedene Arten von Derivaten
  - Aktienkurse sind zufällig
  - "No free lunch" - kein risikoloser Gewinn
  - Modelle (Brown'sche Bewegung, Merton-Black-Scholes Modell)
  - Numerische Rechnungen notwendig

Versicherungsmathematik: Worum geht's dabei?

- Prinzipielle Aufgabenstellung bei Versicherungen:
  Festlegung der Prämie
  Äquivalenzprinzip: Wert der Prämien = Wert der Leistungen (plus Fixkosten)
  Einmalprämien, jährliche Prämien, stetige Prämien
- Versicherungen auf abhängige Leben etc.: zwei oder mehr Personen / Sachen gleichzeitig versichert
- Rückversicherung: Versicherung versichert sich selbst gegen große Schadensforderungen (z.B. Hurricane Andrew)
- Dividendenstrategien: bei genügend Kapital Überschuss als Dividende ausbezahlt
  Was ist die beste Dividendenstrategie bei gleicher Ruinwahrscheinlichkeit?

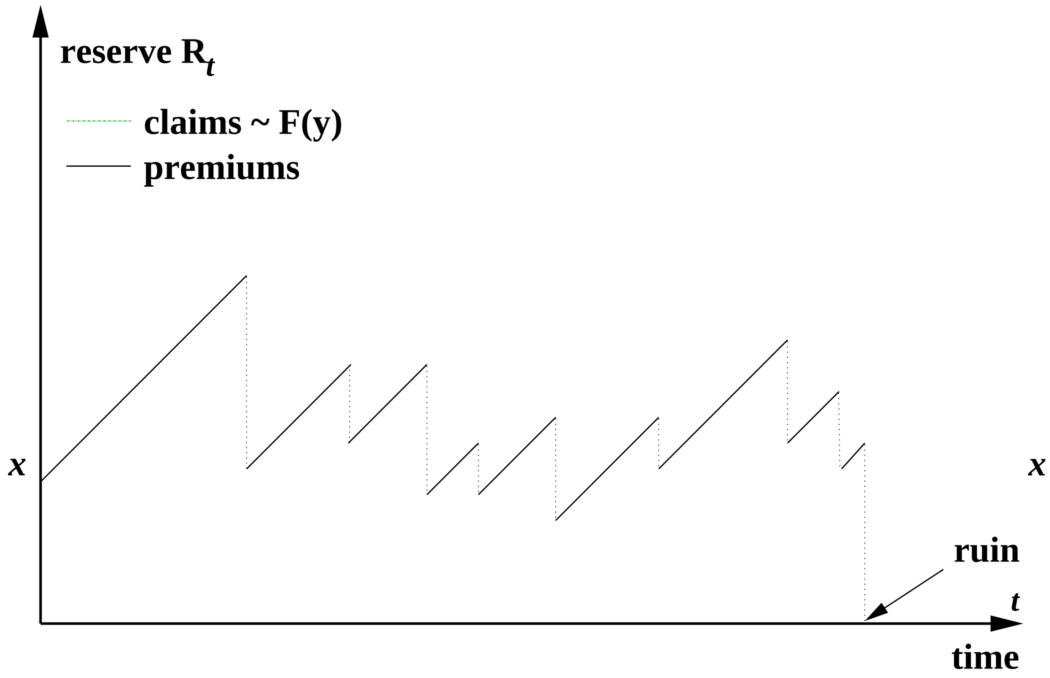
Verschiedene Typen - verschiedene Methoden

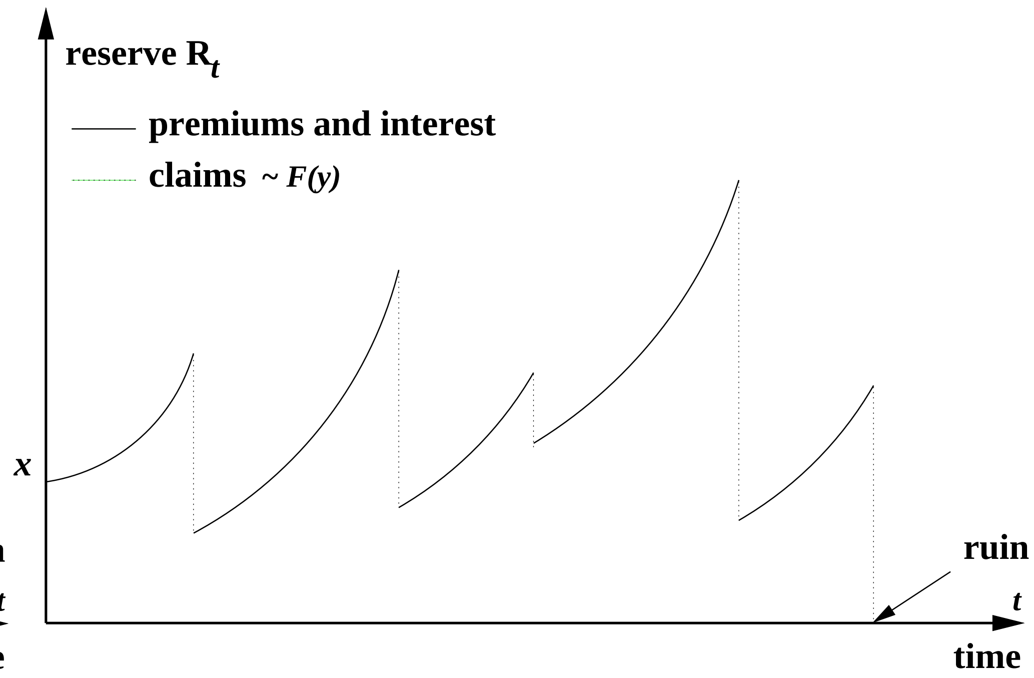
- Lebensversicherung:
  versichert gegen Ab- oder Erleben
  Spezialfall: Pensionsversicherung
  Spezialfall: Invalidenversicherung
- gekoppelte Versicherungen: Zahlung hängt nicht nur von einer Person ab, sondern von mehreren. z.B. Waisenrenten, Witwenpensionen, etc.
  Problem: Sind die Leben wirklich unabhängig (verwitwete Personen haben statistisch höhere Sterblichkeit!)
- Sachversicherung: versichert eine bestimmte Sache gegen ein bestimmtes Ereignis (Diebstahl, Unfall, ...)

individuelles vs. kollektives Risikomodell

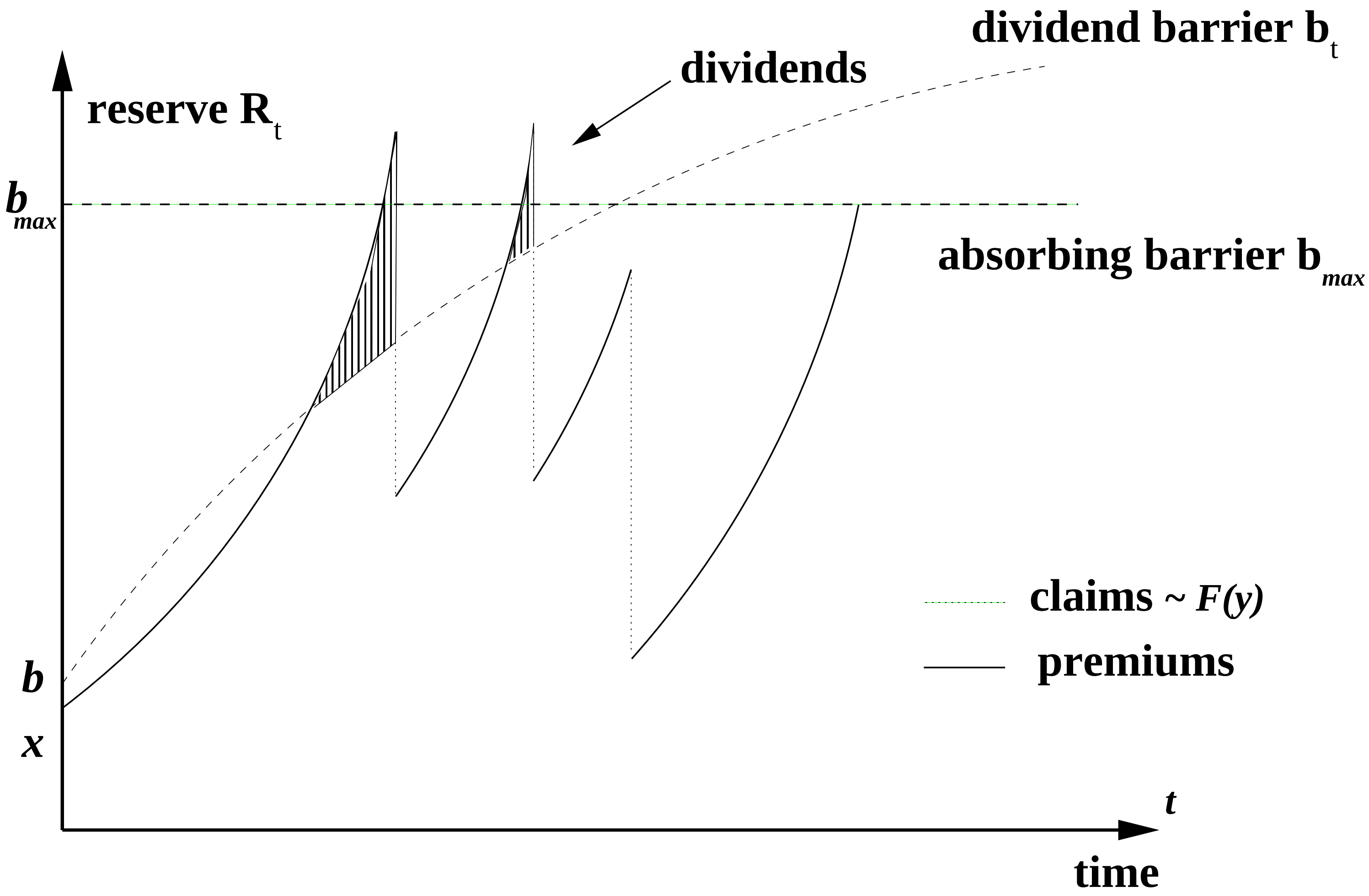
- individuelles Risikomodell: eine einzige Person (ein Verlauf) wird modelliert. Gesamte Versicherung besteht aus Summe von vielen solchen Polizzen.
  - Vorteile: Aus Kenntnis der genauen Sachlage kann Wahrscheinlichkeit / Verlauf sehr gut modelliert werden.
  - Nachteile: Sehr großer Aufwand, oft stehen ohnehin nicht genügend Daten zur Verfügung, bzw. systematischer Fehler möglich. Adjustierung schwierig
- kollektives Risikomodell: Versicherung als ganzes betrachtet, Schadensfälle mit bestimmter Wahrscheinlichkeit und Größe (irrelevant, welche Person die Zahlung verursacht).
  - Vorteile: Nur eine Verteilung modelliert, Ungenauigkeiten mitteln sich raus. Gesamtdaten meist verfügbar (Sterbetafeln, Statistiken).
  - Nachteile: Geht nicht auf spezielle Gegebenheiten ein.

Die Sägezahnkurve - kollektives Risikomodell





Dividendenmodelle



Guthaben über bestimmter Schranke als Dividende an Aktionäre
Nutzenfunktion beschreibt subjektiven Wert eines Guthabens

Wie können die Sterbewahrscheinlichkeiten bestimmt werden?

Provisorische rohe (nicht ausgeglichene) Sterbetafel 2000/02 für Österreich

Genaues Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren	Männliches Geschlecht						Weibliches Geschlecht						Genaues Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren
	Sterbe-wahr-schein-lichkeit im Alters-intervall x bis x +1	Über-lebende im Alter x	Ge-storbene im Alters-intervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x noch zu durch-lebende Jahre: bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x noch zu durch-lebende Jahre: insgesamt	Fernere Lebens-erwartung im Alter x in Jahren	Sterbe-wahr-schein-lichkeit im Alters-intervall x bis x +1	Über-lebende im Alter x	Ge-storbene im Alters-intervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x noch zu durch-lebende Jahre: bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x noch zu durch-lebende Jahre: insgesamt	Fernere Lebens-erwartung im Alter x in Jahren	
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)	x
0	0.0053430	100000	534	99613	7556167	75.56	0.0037607	100000	376	99728	8145536	81.46	0
1	0.0003543	99466	35	99448	7456554	74.97	0.0003893	99624	39	99605	8045809	80.76	1
2	0.0002403	99430	24	99419	7357106	73.99	0.0001936	99585	19	99576	7946204	79.79	2
3	0.0002169	99407	22	99396	7257687	73.01	0.0001056	99566	11	99561	7846628	78.81	3
4	0.0001347	99385	13	99378	7158291	72.03	0.0001254	99555	12	99549	7747068	77.82	4
5	0.0001310	99372	13	99365	7058913	71.04	0.0000609	99543	6	99540	7647519	76.83	5
6	0.0001278	99359	13	99352	6959548	70.04	0.0000892	99537	9	99532	7547979	75.83	6
7	0.0001248	99346	12	99340	6860196	69.05	0.0001164	99528	12	99522	7448447	74.84	7
8	0.0001084	99334	11	99328	6760856	68.06	0.0000998	99516	10	99511	7348924	73.85	8
9	0.0001410	99323	14	99316	6661528	67.07	0.0000849	99506	8	99502	7249413	72.85	9
10	0.0001751	99309	17	99300	6562212	66.08	0.0000921	99498	9	99493	7149911	71.86	10
11	0.0001155	99291	11	99286	6462912	65.09	0.0001356	99489	13	99482	7050418	70.87	11
12	0.0001096	99280	11	99274	6363626	64.10	0.0001154	99475	11	99470	6950935	69.88	12
13	0.0001447	99269	14	99262	6264352	63.10	0.0001161	99464	12	99458	6851466	68.88	13
14	0.0001314	99255	13	99248	6165090	62.11	0.0001748	99452	17	99444	6752008	67.89	14
15	0.0003656	99242	36	99223	6065842	61.12	0.0002397	99435	24	99423	6652564	66.90	15
16	0.0005471	99205	54	99178	5966619	60.14	0.0002016	99411	20	99401	6553141	65.92	16
17	0.0007293	99151	72	99115	5867440	59.18	0.0003187	99391	32	99375	6453740	64.93	17
18	0.0012054	99079	119	99019	5768325	58.22	0.0003885	99359	39	99340	6354365	63.95	18
19	0.0010565	98959	105	98907	5669306	57.29	0.0003359	99321	33	99304	6255025	62.98	19
20	0.0009121	98855	90	98810	5570399	56.35	0.0003110	99287	31	99272	6155721	62.00	20
21	0.0010517	98765	104	98713	5471590	55.40	0.0002906	99256	29	99242	6056449	61.02	21
22	0.0010283	98661	101	98610	5372877	54.46	0.0004040	99228	40	99208	5957207	60.04	22
23	0.0009864	98559	97	98511	5274267	53.51	0.0003388	99188	34	99171	5857999	59.06	23
24	0.0009289	98462	91	98416	5175756	52.57	0.0002113	99154	21	99143	5758829	58.08	24
25	0.0010899	98371	107	98317	5077340	51.61	0.0002369	99133	23	99121	5659685	57.09	25
26	0.0009636	98263	95	98216	4979023	50.67	0.0003562	99110	35	99092	5560564	56.11	26
27	0.0010358	98169	102	98118	4880807	49.72	0.0002789	99074	28	99060	5461472	55.13	27
28	0.0009259	98067	91	98022	4782689	48.77	0.0003201	99047	32	99031	5362412	54.14	28
29	0.0008919	97976	87	97933	4684668	47.81	0.0003801	99015	38	98996	5263381	53.16	29

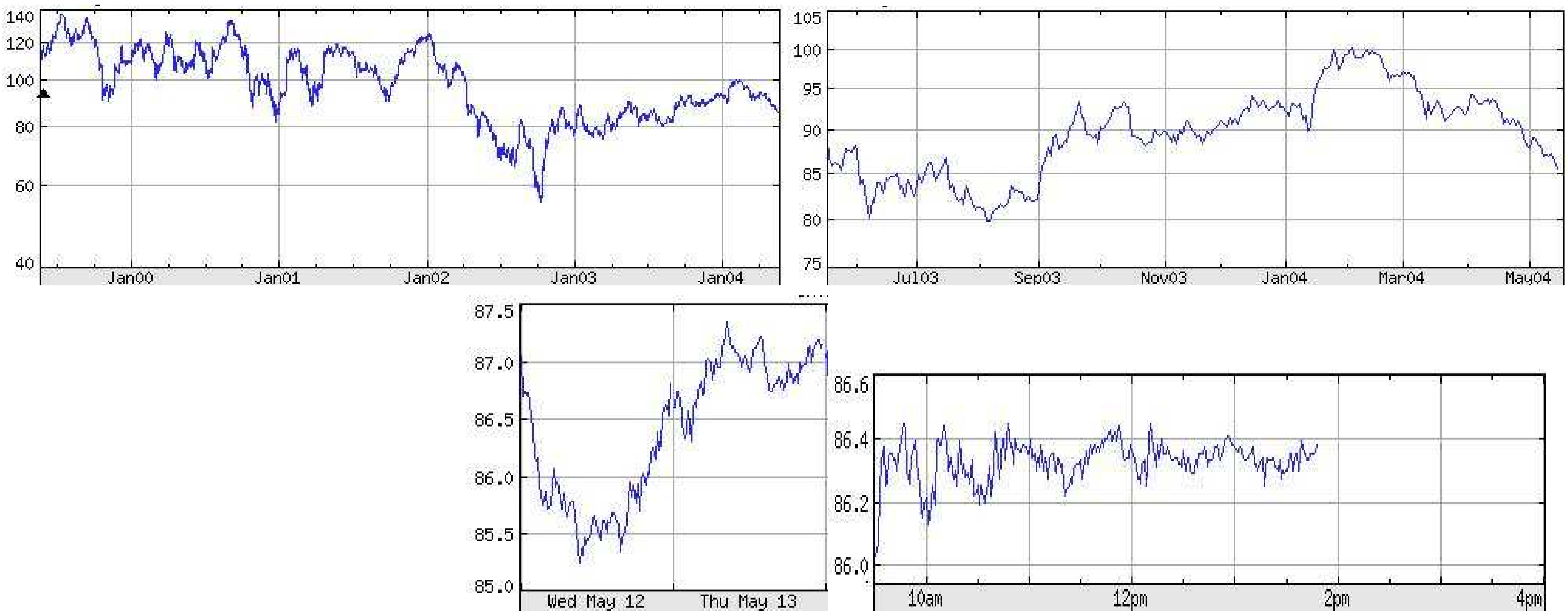
Finanzmathematik: Worum geht's dabei?

- Diverse Finanzderivate am Markt erhältlich
  Meist wird ein Recht oder eine Pflicht verkauft, die mit dem Kurs einer oder mehrerer Aktien (oder Aktienindices) in Verbindung steht.
- Aufgabenstellung: Preisfestlegung für ein derartiges Derivat
  Niemand soll einen risikolosen Gewinn machen können (auf Kosten anderer)
- Problem: Aktienkurse (Indices, Zinssätze) sind nicht fix oder vorhersagbar, sondern zufällig
- Die Finanzmathematik beschäftigt sich mit der Modellierung des Finanzmarktes, und damit der Aktienkurse und damit zusammenhängender Größen (im Erwartungswert).

Verschiedene Arten von Derivaten

- Aktien: Beteiligung an einer Gesellschaft
- Optionen: Recht, eine Aktie zu einem bestimmten Zeitpunkt (-intervall) zu kaufen / verkaufen.
  - Call Option: Recht, eine Aktie zu Preis K zu kaufen
  - Put Option: Recht, eine Aktie zu Preis K zu verkaufen
- Fonds: Investition in einen Fonds, der mit dem Geld wirtschaftet. Oft gewisse Gewinngarantien. Aktienfonds, Immobilienfonds, Dachfonds (Fonds von Fonds), ...
- Futures
- Anleihen
- Hypotheken, etc...

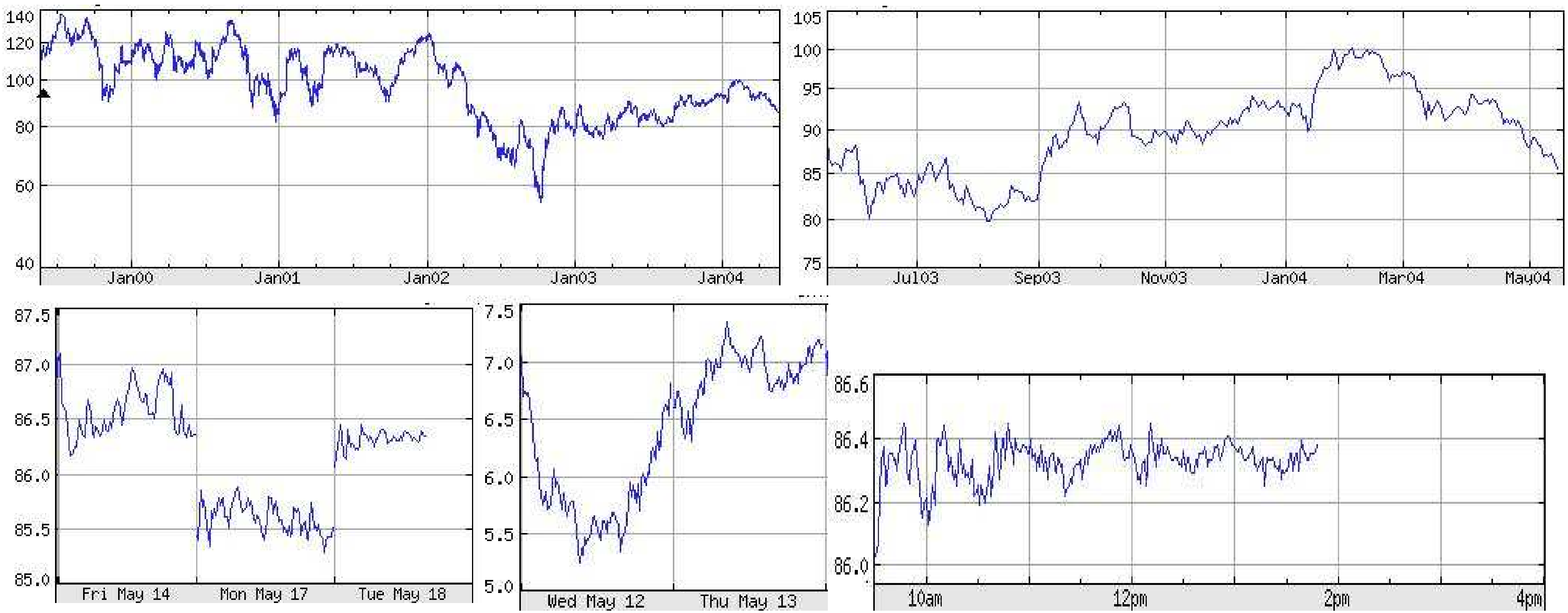
Alles dreht sich um Aktienkurse, und die sind "zufällig"



Aktienkurse von IBM der letzten 5 Jahre, 12 Monate, 2 und 1 Tage
Die Kurse sind mehr oder weniger zufällig $\Rightarrow$ Modellierung?

Skalierungseigenschaft zu vermuten (nicht mehr bei kleinen Intervallen), aber Sprünge möglich!

Alles dreht sich um Aktienkurse, und die sind "zufällig"



Aktienkurse von IBM der letzten 5 Jahre, 12 Monate, 2 und 1 Tage

Die Kurse sind mehr oder weniger zufällig $\Rightarrow$ Modellierung?

Skalierungseigenschaft zu vermuten (nicht mehr bei kleinen Intervallen), aber Sprünge möglich!

"No Free Lunch" - kein risikoloser Gewinn

Finanzmarkt baut auf der Idee der "Arbitrage"-Freiheit auf.

- Es ist nicht möglich ist, risikolosen Gewinn zu machen.
- $\Longrightarrow$ Einschränkung an die Preisfestlegung von Derivaten

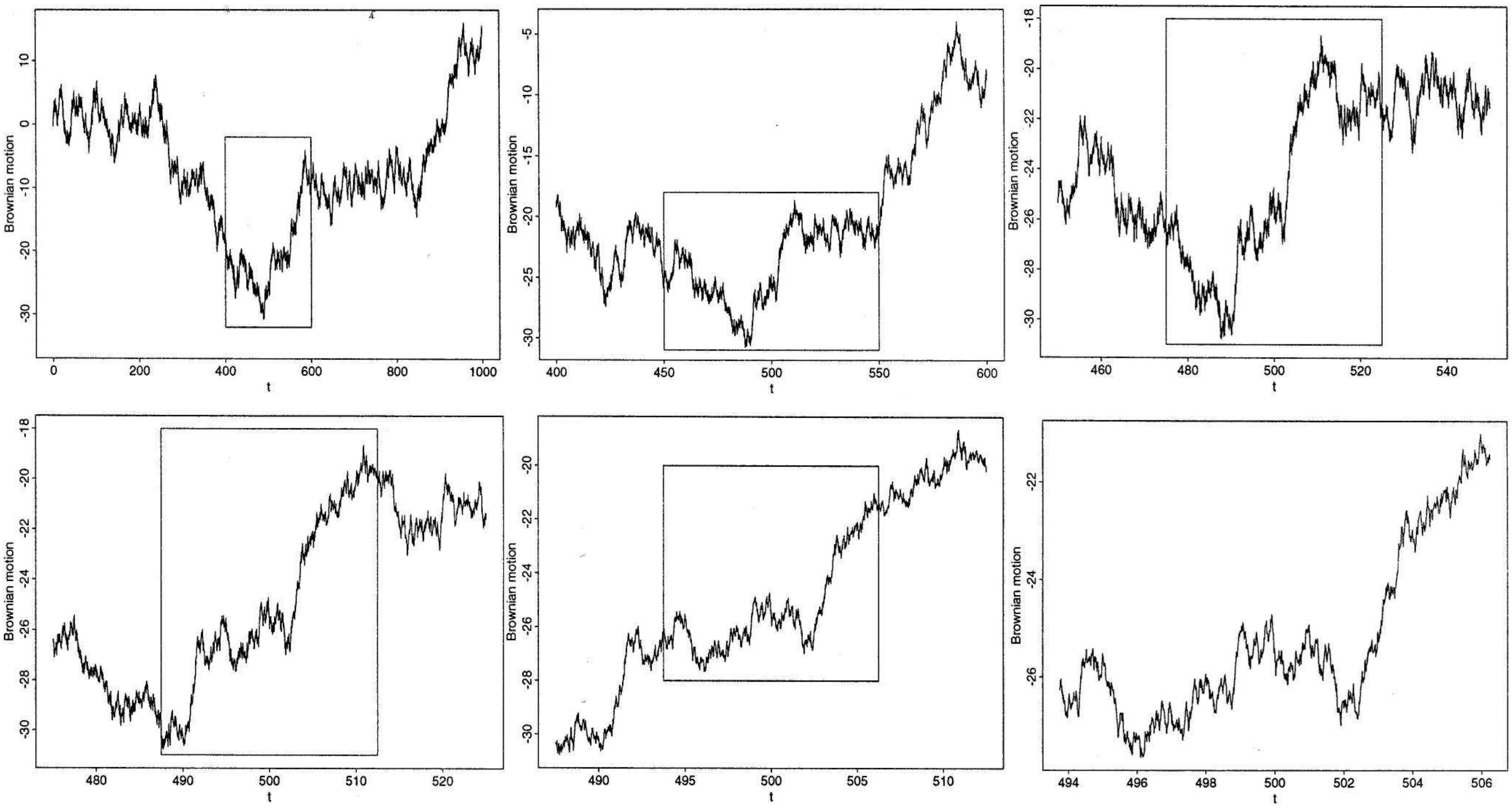
Die Aktienkurse müssen modelliert werden $\Rightarrow$ beschrieben durch Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Modell wird gewählt (mit mehreren freien Parametern)
- Parameter des Modells werden an die tatsächlichen Kurse der Vergangenheit angepasst

Meist werden keine "Insiderinformationen" benutzt (nützlich für kurzzeitige Gewinne), sondern langfristig geplant.

Ein einfaches Modell: die Brownsche Bewegung

Zufälliger Prozess mit sehr günstigen Eigenschaften



Skalierungseigenschaft (auf allen Skalen!)

Merton-Black-Scholes Modell

Nobelpreis für Wirtschaft 1997 an Merton und Scholes
Veröffentlichungen aus dem Jahr 1973!

Zitat aus der Nobel-Preis Bekanntgabe:

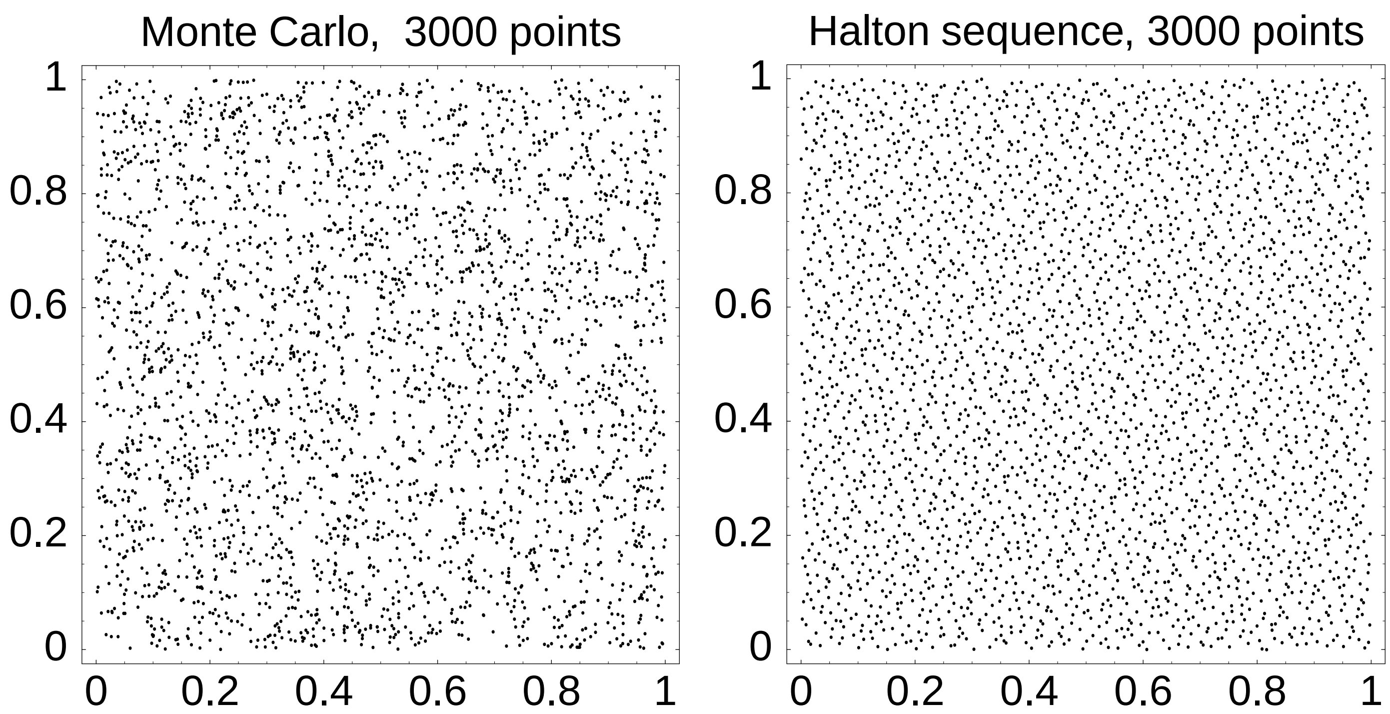
> In 1973, Black and Scholes published what has come to be known as the Black-Scholes formula. Thousands of traders and investors now use this formula every day to value stock options in markets throughout the world.[...]
> Black, Merton and Scholes thus laid the foundation for the rapid growth of markets for derivatives in the last ten years. Their method has more general applicability, however, and has created new areas of research - inside as well as outside of financial economics.

Sehr erfolgreich, meist in der Praxis angewendet, explizite Berechnungen möglich

Nicht ganz richtig, aber "nicht falsch genug" für Praxis.

Auftretende Integrale durch Mittelwert über "sehr viele" Punkte genähert.

- Monte Carlo: Zufallszahlen benutzt
- Quasi-Monte Carlo: Gitter benutzt (deckt Intervall noch besser ab)



Zufallszahlen und Gitter (deckt Intervall besser ab)