

# Quasi-Monte Carlo Methoden

## Am Schnittpunkt von numerischer Analysis, Zahlentheorie und Finanzmathematik

Reinhold Kainhofer

FG "Finanz- und Versicherungsmathematik"  
Institut für Wirtschaftsmathematik  
Technische Universität Wien

Vortragsreihe "Wissenswertes aus der Mathematik"

20. Juni 2005

# Übersicht

- 1 **Quasi-Monte Carlo Methoden zur numerischen Integration**
  - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
  - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
  - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
- 2 Anwendungsgebiete von QMC Methoden
  - Kollektives Risikomodell in der Versicherungsmathematik
  - Rasch oszillierende retardierte Differentialgleichungen
  - Bewertung von Kontrakten
- 3 Probleme bei Standard-QMC...
  - Andere Verteilungen als  $U(0,1)$ , Inversion und "Importance Sampling"
  - Funktionen mit unbeschränkter Variation (Singularität, Knick, ...)
  - Hyperbolische Distanz der Folgen zu den Ecken
  - Optionen: Knicke verursachen unbeschränkte Variation
  - Wann funktioniert QMC gut: die effektive Dimension eines Problems

## Numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten  $w_k$ .

Benötigte Zahl an Stützstellen:  $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung:  $\mathcal{O}(m^{-1}) \equiv \mathcal{O}(N^{-2/s})$  (Curse of dimensionality)

$\implies$  Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit  $s!$

- Idee: Einheitsintervall  $[0, 1]^s$  wird von Stützstellen gut ausgefüllt

## Numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten  $w_k$ .

Benötigte Zahl an Stützstellen:  $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung:  $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$  (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit  $s$ !

- Idee: Einheitsintervall  $[0, 1]^s$  wird von Stützstellen gut ausgefüllt

## Numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten  $w_k$ .

Benötigte Zahl an Stützstellen:  $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung:  $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$  (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit  $s!$

- Idee: Einheitsintervall  $[0, 1]^s$  wird von Stützstellen gut ausgefüllt

## Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über  $N$  zufällig gewählte Stützstellen  $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$  in  $U^s = [0, 1]^s$ :

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

- (1) gilt für quadratisch integrierbare  $f$  (d.h.  $\sigma(f)$  existiert)
- Fehlerordnung:  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  (unabh. von  $s!$ )
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
  - Benutze Glg. (1) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
  - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
  - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

## Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über  $N$  zufällig gewählte Stützstellen  $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$  in  $U^s = [0, 1]^s$ :

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

- (1) gilt für quadratisch integrierbare  $f$  (d.h.  $\sigma(f)$  existiert)
- Fehlerordnung:  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  (unabh. von  $s!$ )
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
  - Benutze Glg. (1) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
  - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
  - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

## Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über  $N$  zufällig gewählte Stützstellen  $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$  in  $U^s = [0, 1]^s$ :

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

- (1) gilt für quadratisch integrierbare  $f$  (d.h.  $\sigma(f)$  existiert)
- Fehlerordnung:  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  (unabh. von  $s!$ )
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
  - Benutze Glg. (1) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
  - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
  - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**



## Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

**(Stern-) Diskrepanz  $D_N^*(S)$**  einer Folge  $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$  definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen  $[0, \mathbf{a})$ :

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (2)$$

mit  $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$  ... Zahl der Punkte in  $J$  und  $\lambda_s(J)$  das Lebesgue-Maß von  $J$ .

Theorem (Koksma-Hlawka Ungl., Fehlerschranke von QMC Integration)

*Ist  $f$  von beschränkter Variation  $V(f)$  auf  $U^s$  im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$ , dass*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (3)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit  $f$  und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerschätzung)

## Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

**(Stern-) Diskrepanz  $D_N^*(S)$**  einer Folge  $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$  definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen  $[0, \mathbf{a})$ :

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (2)$$

mit  $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$  ... Zahl der Punkte in  $J$  und  $\lambda_s(J)$  das Lebesgue-Maß von  $J$ .

### Theorem (Koksma-Hlawka Ungl., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist  $f$  von beschränkter Variation  $V(f)$  auf  $U^s$  im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$ , dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (3)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit  $f$  und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerschätzung)

## Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

**(Stern-) Diskrepanz  $D_N^*(S)$**  einer Folge  $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$  definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen  $[0, \mathbf{a})$ :

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (2)$$

mit  $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$  ... Zahl der Punkte in  $J$  und  $\lambda_s(J)$  das Lebesgue-Maß von  $J$ .

### Theorem (Koksma-Hlawka Ungl., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist  $f$  von beschränkter Variation  $V(f)$  auf  $U^s$  im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$ , dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (3)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit  $f$  und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerschätzung)

## Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Konstruktion von deterministischen Folgen mit möglichst kleiner Diskrepanz (= gute Gleichverteilungseigenschaften)

### Folgen kleiner Diskrepanz

Die besten bekannten Folgen, genannt **Folgen kleiner Diskrepanz**, haben eine Diskrepanz der Ordnung (vermutlich bestmöglich) (mit  $C_s$  nur von Folge und Dim. abhängig  $\Rightarrow$  Tractability):

$$D_N^*(S) \leq C_s \frac{(\log N)^s}{N} \quad (4)$$

Beispiele von Folgen kleiner Diskrepanz

- **$\lfloor n\alpha \rfloor$ -Folge:**  $(\lfloor n\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit  $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$  und geeignetem Vektor  $\alpha_i$  von unabhängigen Irrationalzahlen (Weyl'sches Kriterium).  
Für  $s \geq 2$  kein geeignetes  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  bekannt...

## Folgen kleiner Diskrepanz II

- Halton-Folge in paarw. rel. primen Basen  $\{p_1, \dots, p_s\}$ :

$$\mathbf{x}_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^{-k-1}, \quad \text{mit } n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^k$$

d.h. Spiegelung der Darstellung von  $n$  in Basis  $p_i$  (Koeffizienten  $n_k^{(i)}$ ) am Komma (komponenten-weise).

- Folge in Basis 2:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \dots\right)$
- $x_{15}$  in Basen (2, 3, 5):  $15 = 1111_2 = 120_3 = 30_5$ .

$$\begin{aligned} x_{15}^{(1)} &= 0.1111_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{15}{16} \\ x_{15}^{(2)} &= 0.021_3 = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} = \frac{7}{27} \\ x_{15}^{(3)} &= 0.03_5 = 0 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

- Sobol-Folge, Faure-Folge: digitale Netze/Folgen

## Folgen kleiner Diskrepanz III

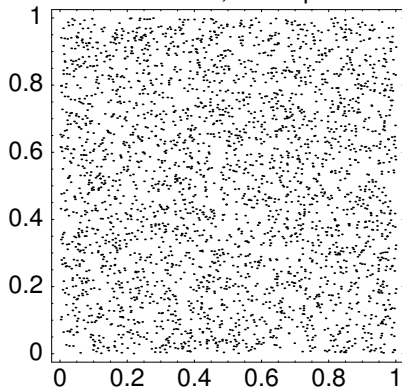
- $(t, m, s)$ -Netze,  $(t, s)$ -Folgen in Basis  $b$ :  
Elementarintervalle  $J = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i})$  mit Ganzzahlen  
 $d_i \geq 0, 0 \leq a_i < b^{d_i}$

$(t, m, s)$ -**Netz**: Punktmenge von  $b^m$  Zahlen, sodass jedes  
Elementarintervall  $J$  mit  $\lambda_s(J) = b^{t-m}$  genau  $b^t$  Punkte enthält

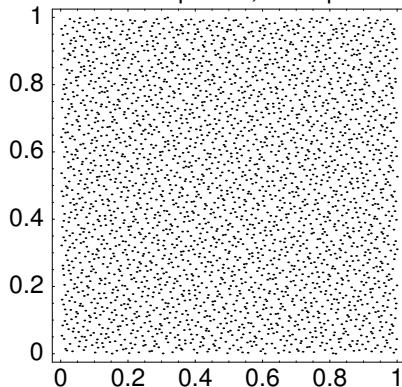
$(t, s)$ -**Folge**: Teilmenge von  $b^m$  aufeinanderfolgenden Elementen ist  
 $(t, m, s)$ -Netz

Verallgemeinerung der Sobol-/Faure-Folgen.  
Konstruktion z.B. nach Niederreiter, Xing, etc.

Monte Carlo, 3000 points



Halton sequence, 3000 points



- Bessere Verteilungseigenschaften
- Korrelationen zwischen den einzelnen Elementen

# Übersicht

- 1 Quasi-Monte Carlo Methoden zur numerischen Integration
  - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
  - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
  - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
- 2 **Anwendungsgebiete von QMC Methoden**
  - **Kollektives Risikomodell in der Versicherungsmathematik**
  - **Rasch oszillierende retardierte Differentialgleichungen**
  - **Bewertung von Kontrakten**
- 3 Probleme bei Standard-QMC...
  - Andere Verteilungen als  $U(0,1)$ , Inversion und "Importance Sampling"
  - Funktionen mit unbeschränkter Variation (Singularität, Knick, ...)
  - Hyperbolische Distanz der Folgen zu den Ecken
  - Optionen: Knicke verursachen unbeschränkte Variation
  - Wann funktioniert QMC gut: die effektive Dimension eines Problems



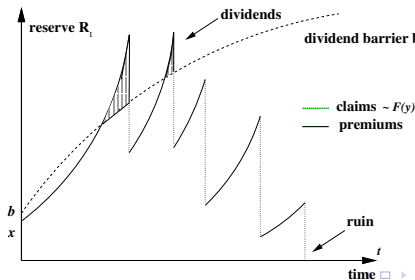
## Kollektives Risikomodell in der Sachversicherung, Dividendenbarriere I

- Verallg. Cramer-Lundbergmodell mit Zins, sublin. Dividendenschranke
- #Schäden  $N_t \sim \text{Poiss}(\lambda)$ , Schadenshöhen  $X_n \sim^{iid} F$  (Comp. Poisson)
- Arbeiten gemeinsam mit H. Albrecher (2001)

Risikoprozess (mit oberer Schranke  $b_t$ , Kapital darüber als Dividenden):

$$dR_t = (c + iR_t)dt - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t < b_t$$

$$dR_t = db_t - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t = b_t$$



## Kollektives Risikomodell in der Sachversicherung, Dividendenbarriere II

Lösung z.B. durch direkte Pfadsimulation möglich.

Integro-Differential-Gleichung für BW  $W(u, b)$  der Dividenden:

$$(c + iu) \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial W}{\partial b} - (i + \lambda)W + \lambda \int_0^u W(u - z, b) dF(z) = 0, \quad \text{mit RB } \left. \frac{\partial W}{\partial u} \right|_{u=b} = 1$$

Äquivalent existiert ein kontrahierender Integraloperator  $A \Rightarrow$  Fixpunktsatz!

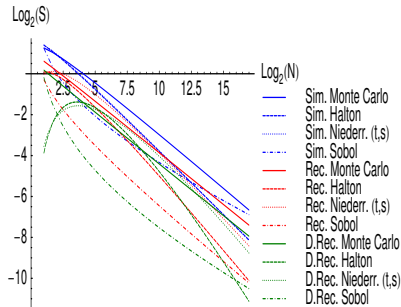
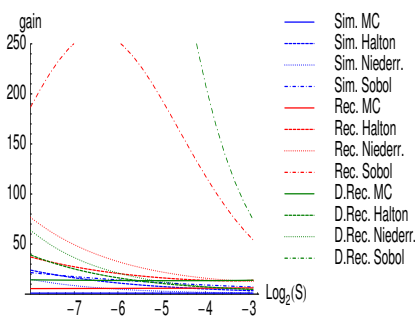
Lösung durch Fixpunktiteration

$$g^{(k)}(u, b) = A^k g^{(0)}(u, b)$$

$$g^{(0)}(u, b) = h(u, b) := \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-is} \left( (c + iu) e^{is} - \text{Barr}'(b, s) \right) ds dt$$

## Kollektives Risikomodell in der Sachversicherung, Dividendenbarriere III

- QMC auf diesen  $k$ -fach iterierten Operator angewendet  $\Rightarrow$   $2k$ -dimensionales Integrationsproblem
- QMC hat geringeren Aufwand für selben Fehler als Monte Carlo oder Pfadsimulation

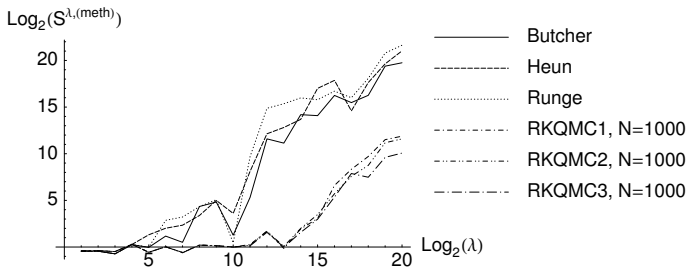


## QMC für stark oszillierende retardierte DG (K., 2002)

Stark oszillierende DG oder DG mit stark oszillierender Lösung (Param.  $\lambda$ ):

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_k(t))), \text{ für } t \geq t_0, k \geq 1,$$
$$y(t) = \phi(t), \text{ for } t \leq t_0,$$

Runge-Kutta-ähnliches Verfahren (nicht 1 Punkt in jedem Schritt, sondern Integral über das ganze Intervall, um die Oszillationen rauszumitteln):



QMC methoden bleiben noch stabil, wo herkömmliche Methoden versagen.

## Bewertung Asiatischer (pfadabhängiger) Optionen

- Payoff: Arithmetisches Mittel über mehrere Zeitpunkte bis Maturity

$$P(S_T) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} - K \right)^+$$

mit  $(S_t)_{t \geq 0}$  ... Preisprozess,  $K$  ... Ausübungspreis

- $S_t = e^{X_t}$  mit Lévy-Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$ , (Inkrementen  $h_i = X_i - X_{i-1} \sim H$ , z.B. NIG, Variance-Gamma, Hyperbolic, ...)

Bewertung mittels Fundamentalsatz (Delbaen / Schachermayer)

$$V_t := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [P(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

mit äquivalentem Martingalmaß  $Q$  (z.B. Esscher-Maß in diesem Fall)

- $n$ -dimensionales Integrationsproblem
- Pfad mit Verteilung nach Maß  $Q$  muss simuliert werden / Integral bzgl. Maß  $Q \Rightarrow$  keine Gleichverteilung
- Typischerweise unbeschränkter Support  $\Rightarrow$  Transformation auf kompaktes Intervall (z.B.  $[0, 1]^S$ ) nötig

## Bewertung Asiatischer (pfadabhängiger) Optionen

- Payoff: Arithmetisches Mittel über mehrere Zeitpunkte bis Maturity

$$P(S_T) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} - K \right)^+$$

mit  $(S_t)_{t \geq 0}$  ... Preisprozess,  $K$  ... Ausübungspreis

- $S_t = e^{X_t}$  mit Lévy-Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$ , (Inkrement  $h_i = X_i - X_{i-1} \sim H$ , z.B. NIG, Variance-Gamma, Hyperbolic, ...)

### Bewertung mittels Fundamentalsatz (Delbaen / Schachermayer)

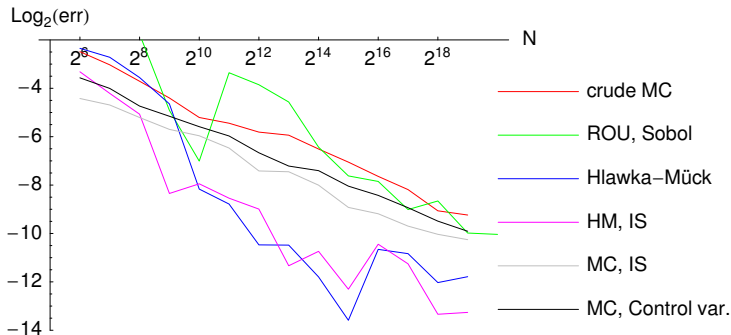
$$V_t := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [P(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

mit äquivalentem Martingalmaß  $Q$  (z.B. Esscher-Maß in diesem Fall)

- $n$ -dimensionales Integrationsproblem
- Pfad mit Verteilung nach Maß  $Q$  muss simuliert werden / Integral bzgl. Maß  $Q \Rightarrow$  keine Gleichverteilung
- Typischerweise unbeschränkter Support  $\Rightarrow$  Transformation auf kompaktes Intervall (z.B.  $[0, 1]^S$ ) nötig

## Ergebnisse: MC im Vergleich mit QMC (Hartinger, K., Predota, 2003)

- konstanter Zins  $r$  (zur Vereinfachung), 12 Dimensionen, NIG Verteilung
- Methode von Hlawka-Mück zur Erzeugung von nicht-gleichverteilten Folgen kleiner Diskrepanz



# Übersicht

- 1 Quasi-Monte Carlo Methoden zur numerischen Integration
  - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
  - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
  - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
- 2 Anwendungsgebiete von QMC Methoden
  - Kollektives Risikomodell in der Versicherungsmathematik
  - Rasch oszillierende retardierte Differentialgleichungen
  - Bewertung von Kontrakten
- 3 **Probleme bei Standard-QMC...**
  - Andere Verteilungen als  $U(0,1)$ , Inversion und "Importance Sampling"
  - Funktionen mit unbeschränkter Variation (Singularität, Knick, ...)
  - Hyperbolische Distanz der Folgen zu den Ecken
  - Optionen: Knicke verursachen unbeschränkte Variation
  - Wann funktioniert QMC gut: die effektive Dimension eines Problems



## Erzeugung von $H$ -verteilten Folgen kleiner Diskrepanz

- **Inversion**: Quantilfunktion oft nicht explizit bekannt;  
Gittereigenschaft bei (bedingter) Inversion nicht erhalten.
- **Acceptance-Rejection**: Für QMC nicht brauchbar, da Korellationen  
vorhanden, und Sprungfunktionen implizit eingeführt

Hlawka-Mück Methode (Inversion mit quasi-empirischer bed. Verteilung)

Sei  $M_h = \sup h(\mathbf{x})$ . Dann hat die Folge  $\tilde{\omega}$  mit

$$\tilde{y}_{k,j} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N [1 + \mathbf{x}_{k,j} - H_j(\mathbf{x}_{r,j})] = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \chi_{[0, \mathbf{x}_{k,j}]}(H_j(\mathbf{x}_{r,j}))$$

eine  $H$ -Diskrepanz  $D_{N,H}(\tilde{\omega}) \leq (1 + 3sM_h)D_N(\omega)$ .

$H$ -Diskrepanz der Folge  $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ :

$$D_{h,N}((\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sup_{J=[0, \mathbf{z}] \subset [0,1]^s} \left| \frac{\#(\mathbf{x}_i, J)}{N} - H(J) \right|$$

Verbesserung der Eigenschaften durch Interpolation der quasi-emp. bed.  
Verteilung (Hartinger, K., 2005)

## Erzeugung von $H$ -verteilten Folgen kleiner Diskrepanz

- **Inversion**: Quantilfunktion oft nicht explizit bekannt;  
Gittereigenschaft bei (bedingter) Inversion nicht erhalten.
- **Acceptance-Rejection**: Für QMC nicht brauchbar, da Korellationen  
vorhanden, und Sprungfunktionen implizit eingeführt

### Hlawka-Mück Methode (Inversion mit quasi-empirischer bed. Verteilung)

Sei  $M_h = \sup h(\mathbf{x})$ . Dann hat die Folge  $\tilde{\omega}$  mit

$$\tilde{y}_{k,j} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N [1 + \mathbf{x}_{k,j} - H_j(\mathbf{x}_{r,j})] = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \chi_{[0, \mathbf{x}_{k,j}]}(H_j(\mathbf{x}_{r,j}))$$

eine  $H$ -Diskrepanz  $D_{N,H}(\tilde{\omega}) \leq (1 + 3sM_h)D_N(\omega)$ .

$H$ -Diskrepanz der Folge  $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ :

$$D_{h,N}((\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sup_{J=[0, \mathbf{z}] \subset [0,1]^s} \left| \frac{\#(\mathbf{x}_i, J)}{N} - H(J) \right|$$

Verbesserung der Eigenschaften durch Interpolation der quasi-emp. bed.  
Verteilung (Hartinger, K., 2005)

## Unbeschränkter Support und unbeschränkte Funktionen

- Beispiel: Erwartungswert einer  $Exp$ -verteilten ZV (unbeschränkter Integrationsbereich  $\rightarrow$  Transformation auf  $[0, 1]$  durch Inversion):

$$\mu = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^1 \frac{\log y}{\lambda} dy \left( = \frac{1}{\lambda} \right)$$

Problem:  $\log y$  unbeschränkt auf  $[0, 1]$ , damit nicht von beschr. Variation

- Tritt sehr oft bei Inversion oder Importance Sampling auf!

Theorem (Owen (2006); Hartinger, K. (2005) für allg. Verteilungen  $H$ )

Sei  $f$  eine Funktion auf  $U^s$  mit  $|\partial^u f| \leq B \prod_{i=1}^s x_i^{-A_i - x_{u(i)}}$  mit  $A_i > 0$ , für alle  $u \subseteq \{1, \dots, s\}$ . Die Folge  $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n}$  erfülle

$$\prod_{i=1}^s x_{n,i} \geq c N^{-r} \quad (\text{"Origin-avoidance"}). \quad (5)$$

Dann ist

$$\left| \int_{U^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{N} \sum f(\mathbf{x}_n) \right| \leq C_1 D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) N^{\eta + r \max_i A_i} + C_2 N^{r(\max_i A_i - 1)}$$

Ähnliches Theorem für Singularitäten in anderen Ecken als Ursprung.

## Unbeschränkter Support und unbeschränkte Funktionen

- Beispiel: Erwartungswert einer  $Exp$ -verteilten ZV (unbeschränkter Integrationsbereich  $\rightarrow$  Transformation auf  $[0, 1]$  durch Inversion):

$$\mu = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^1 \frac{\log y}{\lambda} dy \left( = \frac{1}{\lambda} \right)$$

Problem:  $\log y$  unbeschränkt auf  $[0, 1]$ , damit nicht von beschr. Variation

- Tritt sehr oft bei Inversion oder Importance Sampling auf!

Theorem (Owen (2006); Hartinger, K. (2005) für allg. Verteilungen  $H$ )

Sei  $f$  eine Funktion auf  $U^s$  mit  $|\partial^u f| \leq B \prod_{i=1}^s x_i^{-A_i - \chi u(i)}$  mit  $A_i > 0$ , für alle  $u \subseteq \{1, \dots, s\}$ . Die Folge  $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n}$  erfülle

$$\prod_{i=1}^s x_{n,i} \geq c N^{-r} \quad (\text{"Origin-avoidance"}). \quad (5)$$

Dann ist

$$\left| \int_{U^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{N} \sum f(\mathbf{x}_n) \right| \leq C_1 D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) N^{\eta + r \max_i A_i} + C_2 N^{r(\max_i A_i - 1)}$$

Ähnliches Theorem für Singularitäten in anderen Ecken als Ursprung.

## Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Folgen mit kleinem  $r$  in (5) gesucht (besten hyperbolischen Abstand zum Ursprung / zu den Ecken von  $[0, 1]^s$ )

Hyperbolische Distanz zum Ursprung / zu gemischten Ecken

Mit welcher Ordnung tendiert  $\prod x_{n,i}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0?

Mit welcher Ordnung tendiert  $\prod |h_i - x_{n,i}|$  gegen Ecke  $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$ ?

Hyperbolische Distanz zum Ursprung:

- $r \geq 1$  klar für Halton Folge,  $(t, s)$ -Netze (aufgrund Konstruktion).
- Sobol (1973): Sobol Folge erfüllt (5) mit  $r = 1$  für Ursprung.
- Owen (2006): Halton Folge erfüllt (5) mit  $r = 1$  für Ursprung.
- Hartinger, K., Ziegler (2005): Alle verallgemeinerten Niederreiter Folgen (Sobol, Faure,  $(t, s)$ -Folgen, ...) erfüllen (5) mit  $r = 1$  für Ursprung. (Beweis über formale Laurant-Reihen über Polynomkörper  $\mathbb{F}_b$ )

## Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Folgen mit kleinem  $r$  in (5) gesucht (besten hyperbolischen Abstand zum Ursprung / zu den Ecken von  $[0, 1]^s$ )

### Hyperbolische Distanz zum Ursprung / zu gemischten Ecken

Mit welcher Ordnung tendiert  $\prod x_{n,i}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0?

Mit welcher Ordnung tendiert  $\prod |h_i - x_{n,i}|$  gegen Ecke  $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$ ?

### Hyperbolische Distanz zum Ursprung:

- $r \geq 1$  klar für Halton Folge,  $(t, s)$ -Netze (aufgrund Konstruktion).
- Sobol (1973): **Sobol Folge** erfüllt (5) mit  $r = 1$  für Ursprung.
- Owen (2006): **Halton Folge** erfüllt (5) mit  $r = 1$  für Ursprung.
- Hartinger, K., Ziegler (2005): Alle **verallgemeinerten Niederreiter Folgen** (Sobol, Faure,  $(t, s)$ -Folgen, ...) erfüllen (5) mit  $r = 1$  für Ursprung. (Beweis über formale Laurant-Reihen über Polynomkörper  $\mathbb{F}_b$ )

## Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz II

Hyperbolische Distanz zu **anderen Ecken**  $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$ ,  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$  (Hartinger, K., Ziegler (2005)):

- Für die **Halton-Folge** gilt eine hyperbolische Distanz von **mindestens**  $\mathcal{O}(1/(N \log N))$  für gemischte Ecken (Beweis über Euler-Theorem).
- Für die **Halton-Folge** gilt  $r \leq 1 + \varepsilon$  für gemischte Ecken (Beweis durch Betrachtung der Ziffernentwicklung aufgrund Konstruktion der Halton-Folge durch Spiegelung am Komma  $\Rightarrow$  Diophantische Gleichung

$$1 = C \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} - D \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}$$

mit Unbekannten  $C, D, \beta_k, \alpha_j \in \mathbb{N}$ . Zeige  $r \leq N^{1+\varepsilon}$  für spezielle  $N$ , die Ungl. nicht erfüllen. Schmidt's Subspace Theorem  $\Rightarrow$  nur endliche viele andere  $N \Rightarrow$  asymptotisch irrelevant)

- Für die **Faure Folge** existieren Teilfolgen mit  $r \geq 2$  für gemischte Ecken und  $r \geq \frac{3}{2}$  für  $\mathbf{h} = \mathbf{1}$ .

## Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz II

Hyperbolische Distanz zu **anderen Ecken**  $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$ ,  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$  (Hartinger, K., Ziegler (2005)):

- Für die **Halton-Folge** gilt eine hyperbolische Distanz von **mindestens**  $\mathcal{O}(1/(N \log N))$  für gemischte Ecken (Beweis über Euler-Theorem).
- Für die **Halton-Folge** gilt  $r \leq 1 + \varepsilon$  für gemischte Ecken (Beweis durch Betrachtung der Ziffernentwicklung aufgrund Konstruktion der Halton-Folge durch Spiegelung am Komma  $\Rightarrow$  Diophantische Gleichung

$$1 = c \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} - D \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}$$

mit Unbekannten  $C, D, \beta_k, \alpha_j \in \mathbb{N}$ . Zeige  $r \leq N^{1+\varepsilon}$  für spezielle  $N$ , die Ungl. nicht erfüllen. Schmidt's Subspace Theorem  $\Rightarrow$  nur endliche viele andere  $N \Rightarrow$  asymptotisch irrelevant)

- Für die **Faure Folge** existieren Teilfolgen mit  $r \geq 2$  für gemischte Ecken und  $r \geq \frac{3}{2}$  für  $\mathbf{h} = \mathbf{1}$ .



## Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz II

Hyperbolische Distanz zu **anderen Ecken**  $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$ ,  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$  (Hartinger, K., Ziegler (2005)):

- Für die **Halton-Folge** gilt eine hyperbolische Distanz von **mindestens**  $\mathcal{O}(1/(N \log N))$  für gemischte Ecken (Beweis über Euler-Theorem).
- Für die **Halton-Folge** gilt  $r \leq 1 + \varepsilon$  für gemischte Ecken (Beweis durch Betrachtung der Ziffernentwicklung aufgrund Konstruktion der Halton-Folge durch Spiegelung am Komma  $\Rightarrow$  Diophantische Gleichung

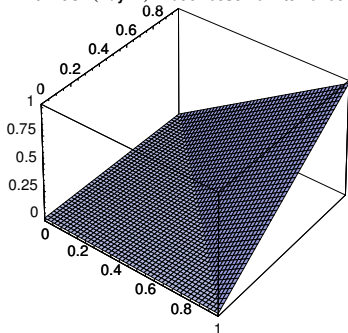
$$1 = c \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} - D \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}$$

mit Unbekannten  $C, D, \beta_k, \alpha_j \in \mathbb{N}$ . Zeige  $r \leq N^{1+\varepsilon}$  für spezielle  $N$ , die Ungl. nicht erfüllen. Schmidt's Subspace Theorem  $\Rightarrow$  nur endliche viele andere  $N \Rightarrow$  asymptotisch irrelevant)

- Für die **Faure Folge** existieren Teilfolgen mit  $r \geq 2$  für gemischte Ecken und  $r \geq \frac{3}{2}$  für  $\mathbf{h} = \mathbf{1}$ .

## Offenes Problem: Knicke verursachen unbeschränkte Variation

Funktion  $(x+y-1)^+$  hat unbeschränkte Variation



- Variation im Sinne von Hardy & Krause ist unbeschränkt bei Funktionen mit Knick (Owen (2005)).
- Hlawka-Mück Ungleichung nicht anwendbar, um Konvergenz und Ordnung zu zeigen
- Empirisch: Funktioniert trotzdem (z.B. Asiatische Optionen)
- Smoothing des Knickes bringt asymptotisch nichts

## Wann funktioniert QMC gut?

Wann funktioniert QMC besonders gut verglichen mit MC?

- Paskov, Traub (1995): Collateralized Mortgage Obligations (30 Jahre, monatlich), 360-dimensionales Problem, QMC weitaus beste Methode
- Asiatische Optionen: Bei 50 Dimensionen ist QMC nicht mehr viel besser als MC bzw. Pfadsimulation

### ANOVA-Zerlegung einer Funktion $f$

Sei  $f : U^s \rightarrow \mathbb{R}$  quadratisch integrierbar. Eine Zerlegung von  $f$  der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} f_u(\mathbf{x}),$$

wobei  $f_u$  nur von den Koordinaten  $x_i$ ,  $i \in u$ , abhängt, heißt ANOVA-Zerlegung, wenn  $\int_0^1 f_u(\mathbf{x}) dx_j = 0$  für  $j \in u$ .

- Für eine ANOVA-Zerlegung gilt  $\text{Var}(f) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \text{Var}(f_u)$ .

## Wann funktioniert QMC gut?

Wann funktioniert QMC besonders gut verglichen mit MC?

- Paskov, Traub (1995): Collateralized Mortgage Obligations (30 Jahre, monatlich), 360-dimensionales Problem, QMC weitaus beste Methode
- Asiatische Optionen: Bei 50 Dimensionen ist QMC nicht mehr viel besser als MC bzw. Pfadsimulation

### ANOVA-Zerlegung einer Funktion $f$

Sei  $f : U^s \rightarrow \mathbb{R}$  quadratisch integrierbar. Eine Zerlegung von  $f$  der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} f_u(\mathbf{x}),$$

wobei  $f_u$  nur von den Koordinaten  $x_i$ ,  $i \in u$ , abhängt, heißt ANOVA-Zerlegung, wenn  $\int_0^1 f_u(\mathbf{x}) dx_j = 0$  für  $j \in u$ .

- Für eine ANOVA-Zerlegung gilt  $\text{Var}(f) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \text{Var}(f_u)$ .

## Effektive Dimension

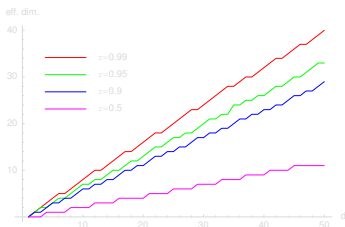
Effektive Dimension einer Funktion  $f$  (Paskov/Traub; Caflisch et al.

**Effektive Dimension  $d_t$  (im Truncation-Sinn):** Anteil  $r\text{Var}(f)$ ,  $r \approx 1$  (z.B.  $r = 0.99$ ), mit den ANOVA-Termen der Variablen  $x_1, \dots, x_{d_t}$  erreicht.

**Effektive Dimension  $d_s$  (im Superposition-Sinn):** Anteil  $r\text{Var}(f)$ ,  $r \approx 1$ , mit ANOVA-Termen der Kardinalität  $d_s$  erreicht (alle Variablen benutzt!).

QMC: Funktionen mit geringer effektiver Dimension.

- CMO Problem hat geringe eff. Dimension (Bridging-Algorithmus)
- Asiatische Optionen haben große effektive Dimension:



## Effektive Dimension

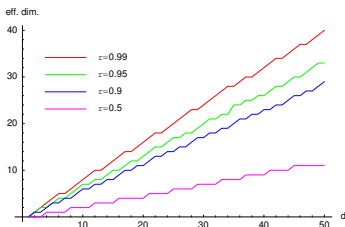
### Effektive Dimension einer Funktion $f$ (Paskov/Traub; Caflisch et al.

**Effektive Dimension  $d_t$  (im Truncation-Sinn):** Anteil  $r\text{Var}(f)$ ,  $r \approx 1$  (z.B.  $r = 0.99$ ), mit den ANOVA-Termen der Variablen  $x_1, \dots, x_{d_t}$  erreicht.

**Effektive Dimension  $d_s$  (im Superposition-Sinn):** Anteil  $r\text{Var}(f)$ ,  $r \approx 1$ , mit ANOVA-Termen der Kardinalität  $d_s$  erreicht (alle Variablen benutzt!).

QMC: Funktionen mit geringer effektiver Dimension.

- CMO Problem hat geringe eff. Dimension (Bridging-Algorithmus)
- Asiatische Optionen haben große effektive Dimension:



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!