

# **Entwicklung sublinearer Dividendenmodelle und deren numerische Behandlung**

*Reinhold Kainhofer*

Graz University of Technology

Austria

Gemeinsame Arbeit mit  
H. Albrecher, TU Graz / KU Leuven

FAM, TU Wien

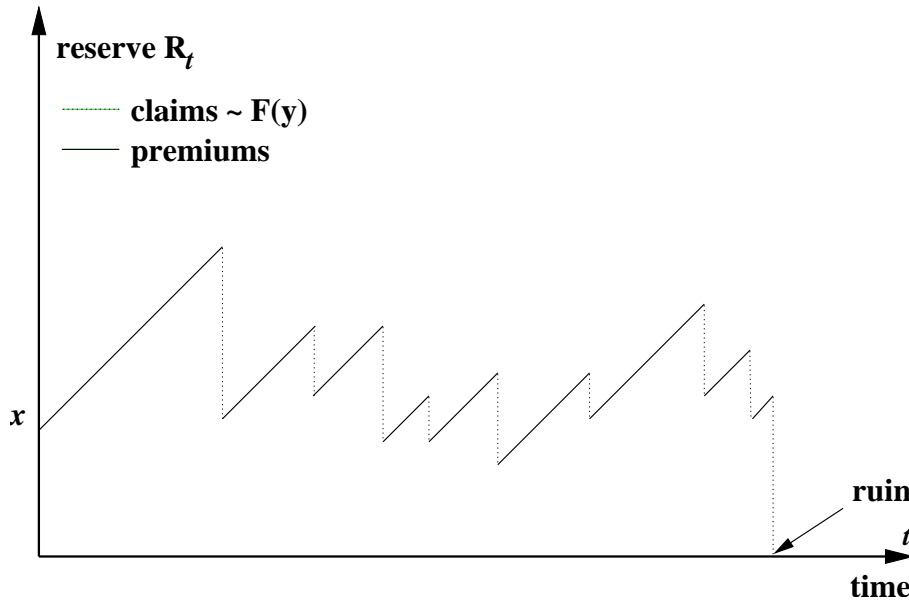
13. November 2003

# Inhalt

1. Einführung
2. Geschichtliches (klass. Risikomodelle):  
ohne Dividendenschranke, konstante und lineare Dividendenschranken
3. Modelle mit sublinearen Dividendenschranken:
  - (a) Ohne Verzinsung
  - (b) Mit Verzinsung
  - (c) Zusätzliche absorbierende obere Schranke (endl. Zeit!)
4. Probleme → Herleitung von Integraloperatoren
5. Quasi-Monte Carlo Methoden:
  - (a) QMC Integration
  - (b) Diskrepanz
  - (c) Folgen kleiner Diskrepanz
  - (d) Koksma-Hlawka Ungleichung
6. Numerische Simulations-/Lösungsverfahren
  - (a) Straight-forward Simulation
  - (b) Rekursiver / Doppelt-rekursiver Algorithmus
  - (c) Iterativer Algorithmus
7. Numerische Beispiele

# Einführung

Ziel: Verallgemeinerung der klassischen Risikomodelle auf sublineare Dividendenschranken



$N(t)$ ... homogener Poissonprozess ( $\lambda$ )

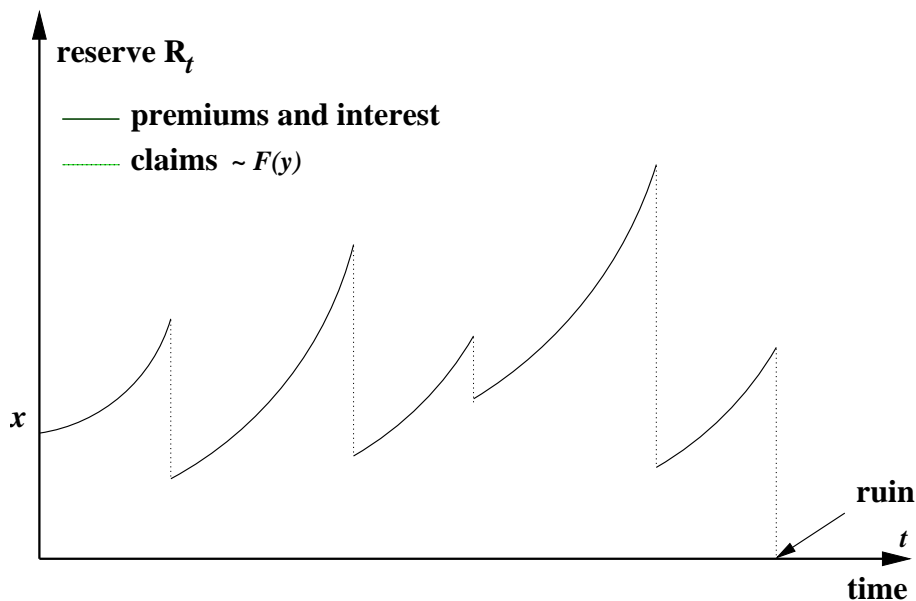
$X_n$ ... iid. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$

$c$ ... Prämiedichte

## Überlebenswahrscheinlichkeit (ÜW))

$$\phi(u, t) = Pr\{R_s \geq 0 \forall 0 \leq s \leq t \mid R_0 = u\}$$

Risikomodell mit konstanter Verzinsung der Reserve:



# Risikomodelle mit Dividendenbarrieren (Historisches)

- Erste Strategien mit Dividendenbarrieren  
Bühlmann (1970)

- Horizontale Dividendenschranken  $b_t \equiv \text{const.}$

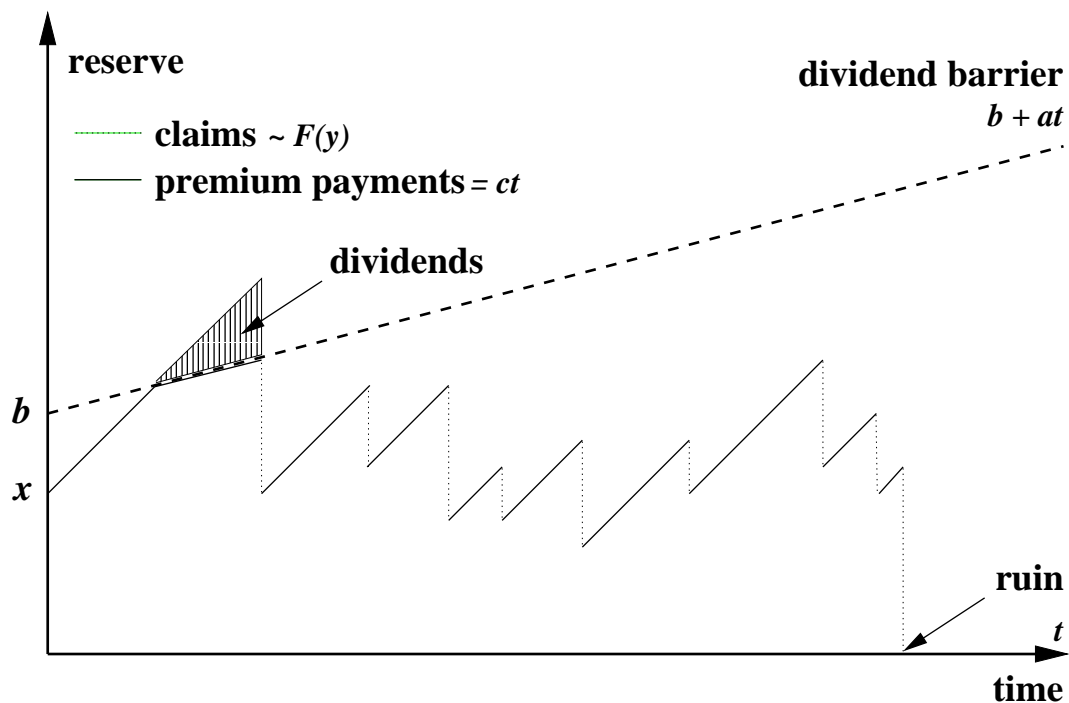
Dickson & Gray (1984): absorb. Schranke (nur ÜW),  
Paulsen & Gjessing (1997):

Dividendenzahlungen bei Erreichen der Schranke,  
Gerber & Shiu (1998)

- Lineare Dividendenschranken

$$b_t = b + at$$

Gerber (1974, 1981),  
Siegl & Tichy (1996),  
Albrecher & Tichy (2000)



## Modellvariablen:

---

---

$c$	.....	Prämiendichte
$\lambda$	.....	Häufigkeit der auftretenden Schäden
$a$	.....	Steigung der Dividendenbarriere
$x$	.....	Anfangskapital
$b$	.....	Anfangsposition der Barriere
$F$	.....	Schadensverteilung
$\delta$	.....	Intensität der Zinsrate
$U(x)$	.....	ÜW ohne Schranke
$V(x)$	.....	$E[\text{Dividenden}]$ ohne Ruin

---

---

## Modellgleichungen

### Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$aU_b + cU_x - \lambda U + \lambda \int_0^x U(x-y)dF(y) = 0$$
$$U_x(b, b) = 0, \lim_{b \rightarrow \infty} U(x, b) = U(x)$$

Exponentiell-verteilte Schäden (Gerber 1981):

$$c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial b} + (c - \lambda) \frac{\partial U}{\partial x} + a \frac{\partial U}{\partial b} = 0$$

### Erwartungswert der Dividendenzahlungen vor Ruin

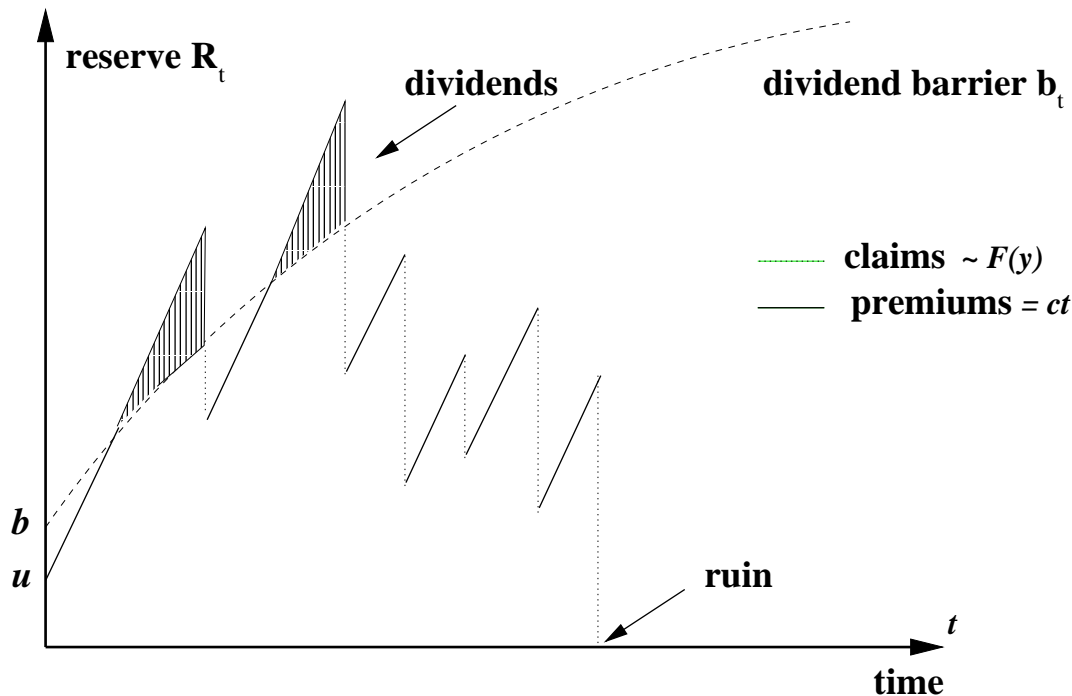
$$cW_x + aW_b - (\lambda + \delta)W + \lambda \int_0^x W(x-y, b)dF(y) = 0$$
$$W_x(b, b) = 1, \lim_{b \rightarrow \infty} W(b-x, b) = V(x)$$

Exponentiell-verteilte Schäden (Gerber 1981):

$$c \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial b} + (c - \delta - \lambda) \frac{\partial W}{\partial x} + a \frac{\partial W}{\partial b} - \delta W = 0$$

Lösung möglich durch Variablentrennung und Reihenansatz  
(Rekursion für Koeffizienten)

# Einfaches Risikomodell mit sublinearer Dividendenschranke und konstanter Zinsrate (Modell A)




---



---

$N(t)$ ..	Schadensanzahl (hom. Poisson-Prozess, $\lambda$ )
$X_n$ .....	iid. Zufallsvariablen mit Schadensverteilung $F$
$c$ .....	Prämiendichte
$i$ .....	konstante Zinsrate (für Dividendenzahlungen)
$b_t$ .....	Zeitabhängige Dividendenschranke
$R_t$ .....	Risikoprozess der Versicherung
$\phi(u, b)$ .	Überlebenswahrscheinlichkeit
$W(u, b)$	Erwartungswert der ausbezahlten Dividenden

---



---

Risikoprozess entwickelt sich nach:

$$dR_t = cdt - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t < b_t$$

$$dR_t = db_t - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t = b_t.$$

Dividendenschranke:

$$\text{Barr}(b, t) = \left( b^m + \frac{t}{\alpha} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad b \geq 0, m > 1$$

## Integro-Differentialgleichungen für $\phi(u, b)$ und $W(u, b)$

Herleitung wie im klassischen Fall über totale Wahrscheinlichkeit

### Integro-Differential-Gleichung für $\phi(u, b)$ :

$$c \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial b} - \lambda \phi + \lambda \int_0^u \phi(u-z, b) dF(z) = 0$$

mit Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial u} \right|_{u=b} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \phi(u, b) = \phi(u).$$

### Integro-Differential-Gleichung für $W(u, b)$ :

$$c \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial W}{\partial b} - (i + \lambda)W + \lambda \int_0^u W(u-z, b) dF(z) = 0$$

mit Randbedingung  $\left. \frac{\partial W}{\partial u} \right|_{u=b} = 1$ .

Analoge Gleichung für  $V(u, b)$  bei Dividendenzahlung auch nach Ruin ( $\int_0^\infty$  statt  $\int_0^u$ )

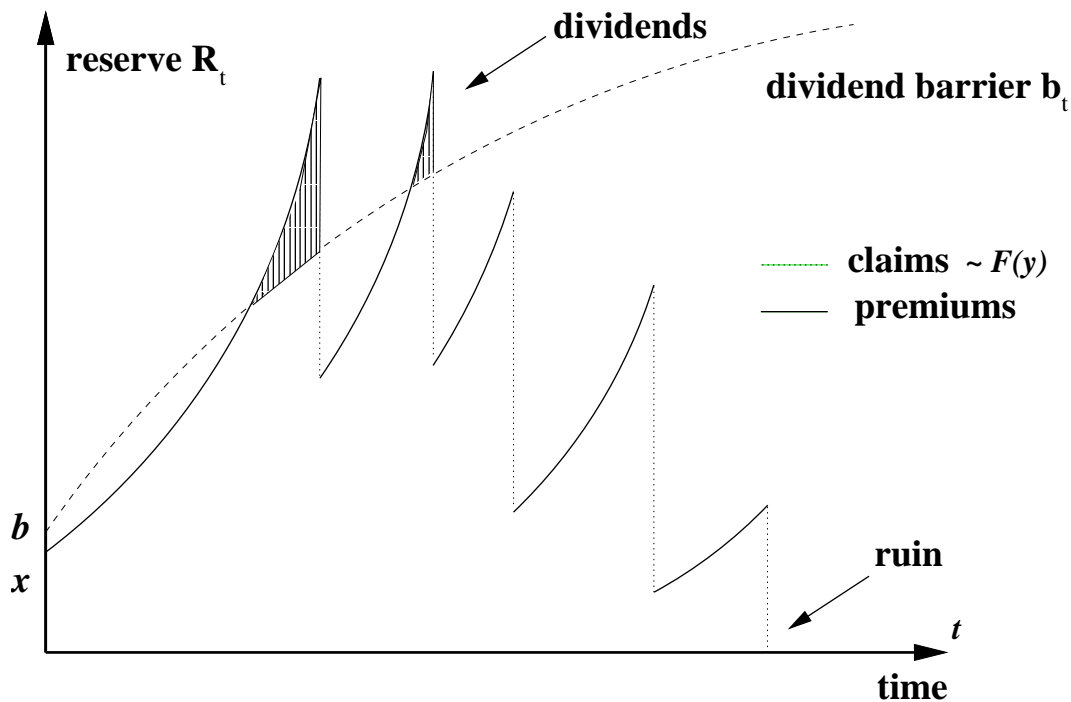
### Nichtlineare PDG für Exponentialverteilung:

$$c \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial b \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0$$

Randbedingung:  $\left( c \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial b} \right) \Big|_{u=0} = 0$

Reihenansatz nicht mehr möglich, Rekursionsbedingungen von Koeffizienten nicht erfüllt

# Sublineare Dividendenschranke und verzinste Reserve (Modell A verzinst)



Risikoprozess:

$$dR_t = (c + iR_t)dt - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t < b_t$$

$$dR_t = db_t - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t = b_t.$$

**Integro-Differential-Gleichung für  $\phi(u, b)$ :**

$$(c + iu) \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial b} - \lambda \phi + \lambda \int_0^u \phi(u - z, b) dF(z) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial u} \right|_{u=b} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \phi(u, b) = \phi(u).$$

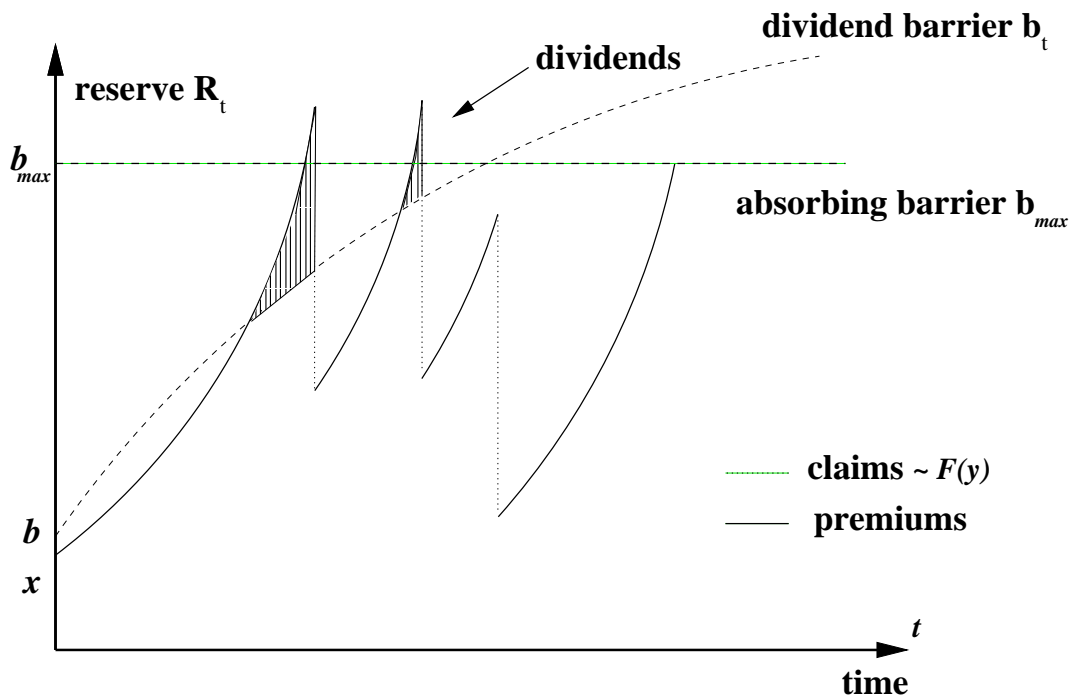
**Integro-Differential-Gleichung für  $W(u, b)$ :**

$$(c + iu) \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial W}{\partial b} - (i + \lambda)W + \lambda \int_0^u W(u - z, b) dF(z) = 0$$

mit Randbedingung  $\left. \frac{\partial W}{\partial u} \right|_{u=b} = 1$ .



# Verzinst Reserve, sublineare Dividendenbarriere und absorbierende horizontale Schranke (Modell B)



Motivation:

1. Mathematisch: Prozess stoppt mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlicher Zeit
2. Bisherige Modelle liefern keinen kontrahierenden Integraloperator für  $\phi(u, b)$
3. Ökonomisch: Änderung der Strategie ab einer gewissen Kapitalmenge

**Integro-Differential-Gleichung für  $\phi(u, b)$ :**

Wie für Modell ohne absorb. Schranke, Randbedingung

$$\phi(u, b_{max}) = \frac{\phi(u)}{\phi(b_{max})}$$

$\phi(x)$  ... Überlebenswahrscheinlichkeit ohne Dividendenbarriere und Schranke

**Erwartungswert der Dividendenzahlungen:**

Dividenden nur bis Zeitpunkt, wo Div.Barr. die Schranke erreicht.

## Integraloperatoren für die Modelle

Integraloperatoren statt Integro-DG (die nicht leicht analytisch lösbar sind)

$\phi(u, b)$  bzw.  $W(u, b)$  sind Fixpunkte dieser Operatoren.

**Operator für  $W(u, b)$  ohne absorbierende Schranke:**

$$\begin{aligned}
 Ag(u, b) &= \\
 &= \int_0^{t^*} \lambda e^{-(\lambda+i)t} \int_0^{(c'+u)e^{it}-c'} g((c'+u)e^{it}-c'-z, \text{Barr}(b, t)) dF(z) dt \\
 &\quad + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+i)t} \int_0^{\text{Barr}(b, t)} g(\text{Barr}(b, t)-z, \text{Barr}(b, t)) dF(z) dt \\
 &\quad + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-is} ((c+iu)e^{is}-\text{Barr}'(b, s)) ds dt,
 \end{aligned}$$

mit Dividendenbarriere  $\text{Barr}(b, t) = (b^m + \frac{t}{\alpha})^{1/m}$  und  $c' = \frac{c}{i}$ .  
 $t^*$  ist definiert durch

$$(c' + u)e^{it^*} - c' = \left(b^m + \frac{t^*}{\alpha}\right)^{1/m}.$$

- Kontrahierender Operator:

Für  $g_1, g_2 \in L^\infty(\mu)$  und  $\forall 0 \leq u \leq b < \infty$  gilt

$$|Ag_1(u, b) - Ag_2(u, b)| \leq \|g_1 - g_2\| \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+i)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + i} \|g_1 - g_2\|$$

$\Rightarrow$  Eindeutiger Fixpunkt (Banach-Theorem), ist gesuchtes  $W(u, b)$ .

- Problem: Entsprechender Operator für  $\phi(u, b)$  nicht kontrahierend.

# Quasi-Monte Carlo Methoden

## MC / QMC Integration

Integral approximiert durch endliche Summe an  $N$  Stützstellen (Zufallspunkte oder Quasi-Zufallszahlen):

$$\int_{[0,1]^s} f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

**MC:**  $x_i$  Zufallszahlen

**QMC:**  $x_i$  Folge kleiner Diskrepanz

Folgen kleiner Diskrepanz: deterministische Folgen  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N} \in [0, 1]^s$  mit möglichst guten Verteilungseigenschaften

## Diskrepanz

Stern-Diskrepanz  $D_N^*$  der Punktmenge  $S$ :

$$D_N^*(S) = \sup_{a,b \in [0,1]^s} \left| \frac{A([0, 1]^s, S)}{N} - \lambda_s([a, b]) \right|$$

## Fehler bei QMC-Integration (Koksma-Hlawka Ungleichung):

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{[0,1]^s} f(u) du \right| \leq V([0, 1]^s, f) D_N^*(x_1, \dots, x_N) .$$

- Fehler faktorisiert in Funktions- und Folgen-abhängigen Teil!
- Absolute obere Schranke (deterministisch, Fehler kann nicht größer sein)
- Abschätzung nur theoretisch relevant (Konvergenzbeweis), da sehr konservativ
- Verallgemeinerung auf uneigentliche Integration möglich (für unbeschränktes  $f$  gilt  $V([0, 1]^s, f) = \infty$ )

# Gängige Folgen für QMC Methoden

Ziel: Erzeugung von Folgen mit möglichst guter Gleichverteilung  
(=möglichst kleiner Diskrepanz)

**Folgen kleiner Diskrepanz:**

$$D_N^*(S) \leq C_s \left( \frac{(\log N)^s}{N} \right)$$

$C_s \dots$  konstanter Faktor, nur abhängig von Folge und Dimension  
(Tractability!)

**Beispiele für Folgen kleiner Diskrepanz in  $[0, 1]^s$ :**

- Halton-Folge in Basen  $\{p_1, \dots, p_s\}$ :

$$x_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^{-k-1}, \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^k$$

d.h. "Spiegelung der Darstellung von  $n$  in Basis  $p_i$  (Koeffizienten  $n_k^{(i)}$ ) am Komma"

- $\lfloor n\alpha \rfloor$ -Folgen:  $\alpha \dots$  Vektor von unabhängigen nicht-rationalen Zahlen.  $(\lfloor n\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$  ist gleichverteilt (Weyl'sches Kriterium)
- Sobol-Folge, Faure-Folge: digitale Netze/Folgen
- $(t, m, s)$ -Netze,  $(t, s)$ -Folgen in Basis  $b$ :  
Elementarintervalle  $J = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i})$  mit Ganzzahlen  $d_i \geq 0$ ,  $0 \leq a_i < b^{d_i}$

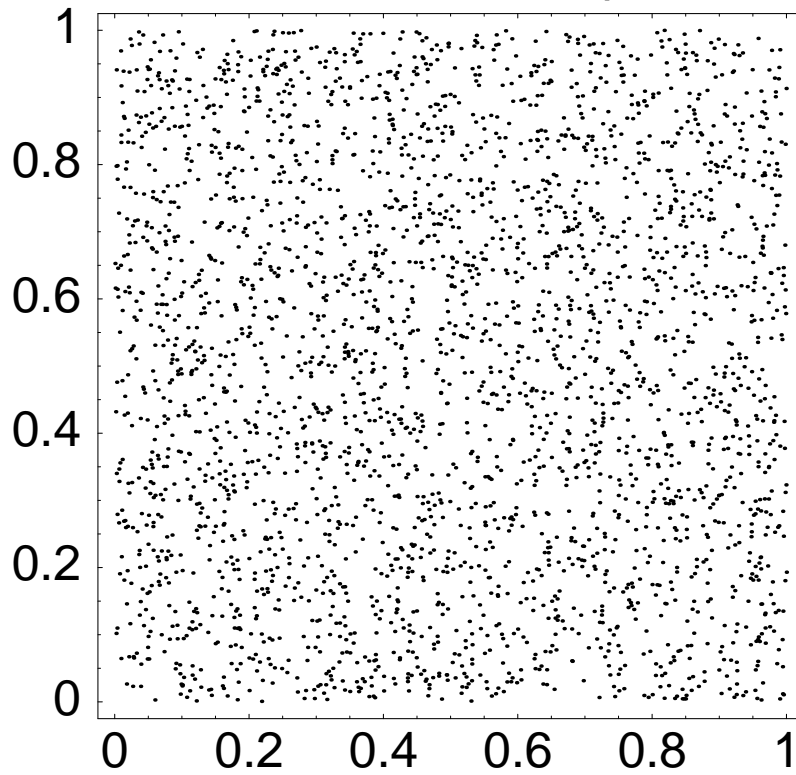
$(t, m, s)$ -**Netz**: Punktmenge von  $b^m$  Zahlen, sodass jedes Elementarintervall  $J$  mit  $\lambda_s(J) = b^{t-m}$  genau  $b^t$  Punkte enthält

$(t, s)$ -**Folge**: Teilmenge von  $b^m$  aufeinanderfolgenden Elementen ist  $(t, m, s)$ -Netz

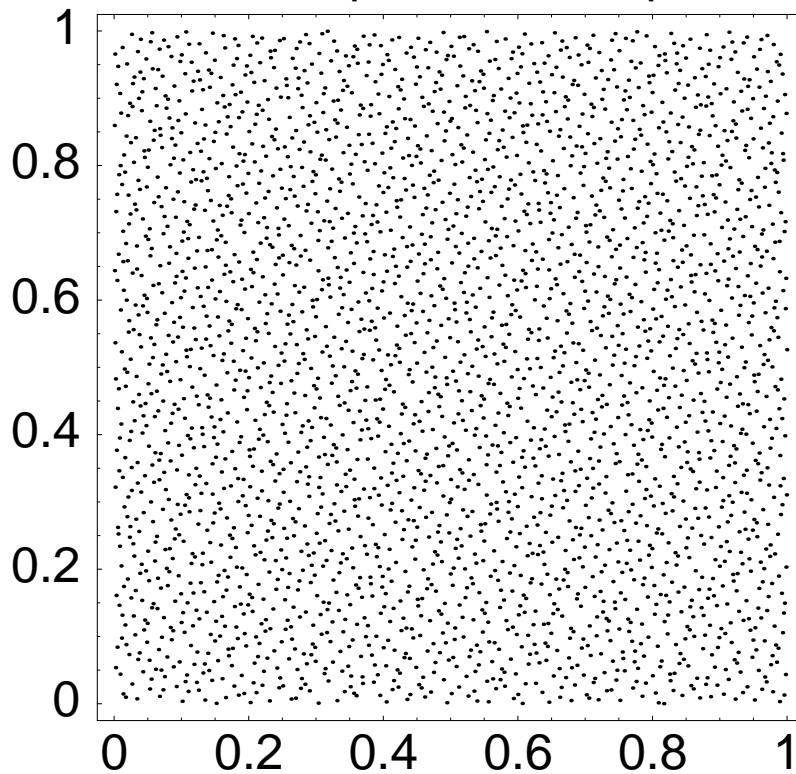
Verallgemeinerung der Sobol-/Faure-Folgen.

Konstruktion z.B. nach Niederreiter, Xing, etc.

Monte Carlo, 3000 points



Halton sequence, 3000 points



Problem bei deterministischen Folgen: Korrelationen zwischen Folgeelementen und/oder Komponenten

# Numerische Verfahren zur Lösung des Integraloperators

## 1) Direkte Simulation von Pfaden (MC, QMC):

$N$  Pfade simuliert, Mittelwert ist Schätzer

$$\phi(u, b) \approx \frac{m}{N}$$

$$W(u, b) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k)$$

$m$  ... Anzahl der überlebenden Pfade (Abbruchkriterium!)

$v(k)$  ... diskontierte Dividendenzahlungen für  $k$ -ten Pfad

jede Trajektorie als 400-dimensionaler Punkt einer Zufallsfolge bzw. Folge kleiner Diskrepanz gewählt (Transformation von Gleichverteilung auf Exponential- und Schadensverteilung).

Abbruchkriterium für Überleben: Zeitpunkt  $T_\infty$  wird ohne Ruin erreicht

- $\phi(u, b)$ : Bias nach oben, Trajektorien können auch nach  $T_\infty$  zu Ruin führen!
- $W(u, b)$ : Zahlungen nach  $T_\infty$  durch den Diskontfaktor praktisch irrelevant

Alternatives Abbruchkriterium für Überleben: Kapital  $b_\infty$  wird von Trajektorie erreicht  $\Rightarrow$  Modell B (absorbierende obere Schranke)

# Lösung durch Fixpunktiteration

$$g^{(k)}(u, b) = A^k g^{(0)}(u, b)$$

$$g^{(0)}(u, b) = h(u, b) := \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-is} ((c + iu)e^{is} - \text{Barr}'(b, s)) ds dt$$

bzw.  $g^{(-1)}(u, b) = 0$ .

- Integrale in  $Ag(u, b)$  auf  $[0, 1]$  transformiert für MC / QMC
- Abbruch nach  $k$  Iterationsschritten

## 2 Arten von Fehler:

1. "Abschneiden" der Iteration (durch Kontraktionseigenschaft abschätzbar)
2. (Q)MC Integrationsfehler (Koksma-Hlawka)

Fehlerabschätzung möglich  $\Rightarrow$  Konvergenzbeweis

## 2) Doppelt rekursive Methode:

Beide Integrale in  $Ag(u, b)$  werden getrennt mit QMC approximiert

$\Rightarrow 2^k$  Integrale der Dimension  $2k$  bei Tiefe  $k$

## 3) Rekursive Methode:

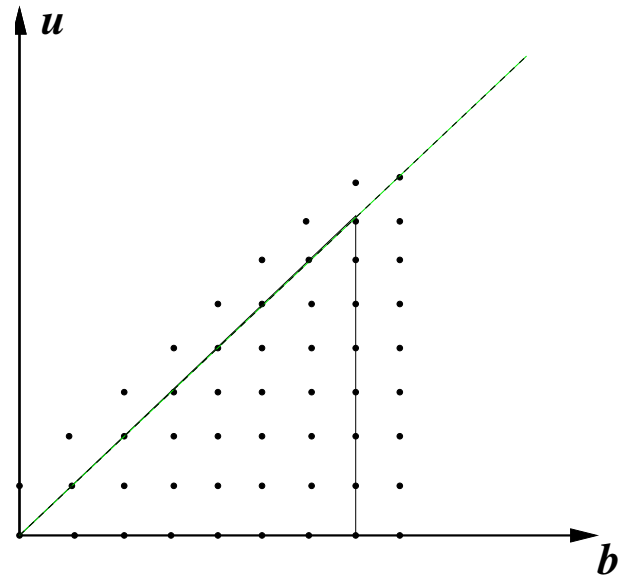
Integrale in  $Ag(u, b)$  zu einem zusammengefasst

$\Rightarrow$  ein  $2k$ -dimensionales Integral

$$W(u, b) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n^{(k)}(u, b)$$

## 4) Iterativer Algorithmus

- Diskretisierung des Bereichs  $0 \leq u \leq b \leq C$ .
- Integraloperator wird jeweils auf gesamtes Gitter angewendet, Zwischenpunkte durch (lineare) Interpolation
- Lösung kann nur am gesamten Bereich berechnet werden.



$$\hat{g}_{j,k}^{(0)} = h(u_j, b_k)$$

$$\hat{g}_{j,k}^{(i)} = h(u_j, b_k) + \frac{\lambda}{\lambda + i}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(z_{max}(u_j, b_k, t_n^i)) I \left( \hat{g}^{(i-1)}, z_{max}(u_j, b_k, t_n^i) - z_n^i, \left( b_k^m + \frac{t_n^i}{\alpha} \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

$$\forall 0 \leq j \leq j_{max}, \forall 0 \leq k \leq k_{max} \quad \text{für } 1 \leq i \leq i_{max}.$$

$(t_n^i, z_n^i)$  bezeichnet das  $n$ -te Element einer 2-dimensionalen Folge.

Vorteil: nur zweidimensionale Integration

- QMC Verfahren für sehr große Dimensionen nicht ideal
- In 2 Dimensionen sehr gute Verteilungseigenschaften der Folge



## Numerische Ergebnisse

Berechnungen für  $m = 2$  und verschiedene Schadensverteilungen ( $\mu = 1, \sigma^2 = 0.5$ )

- Pareto-Verteilung
- Weibull
- Gamma
- Lognormal

Drei dieser Verteilungen sind Heavy-Tail Verteilungen.

- "Exakte" Werte durch Berechnung mit 10 Mio. Punkten.
- Rekursionstiefe (rek., doppelt rek.):  $k = 66 \Rightarrow 132$  Dim.
- Iterationen:  $i_{\max} = 7$ , Gitter bis  $b = 7$  (um Extrapolationseffekte zu verhindern)

Ergebnisse aus Albrecher & K. (2003), Albrecher & K. & Tichy (2002)

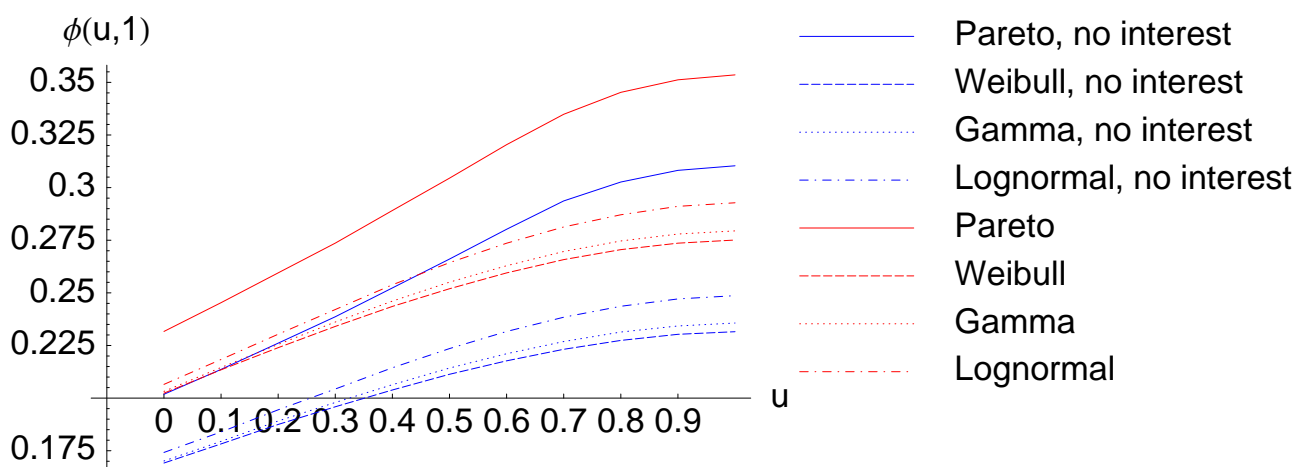


Abbildung:  $\phi(u, 1)$  in Modell A

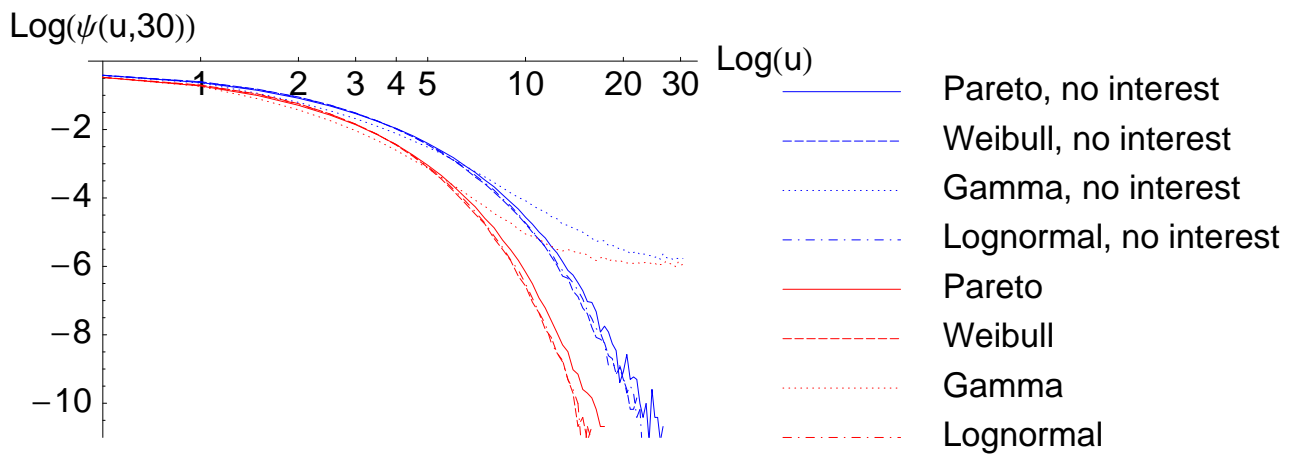
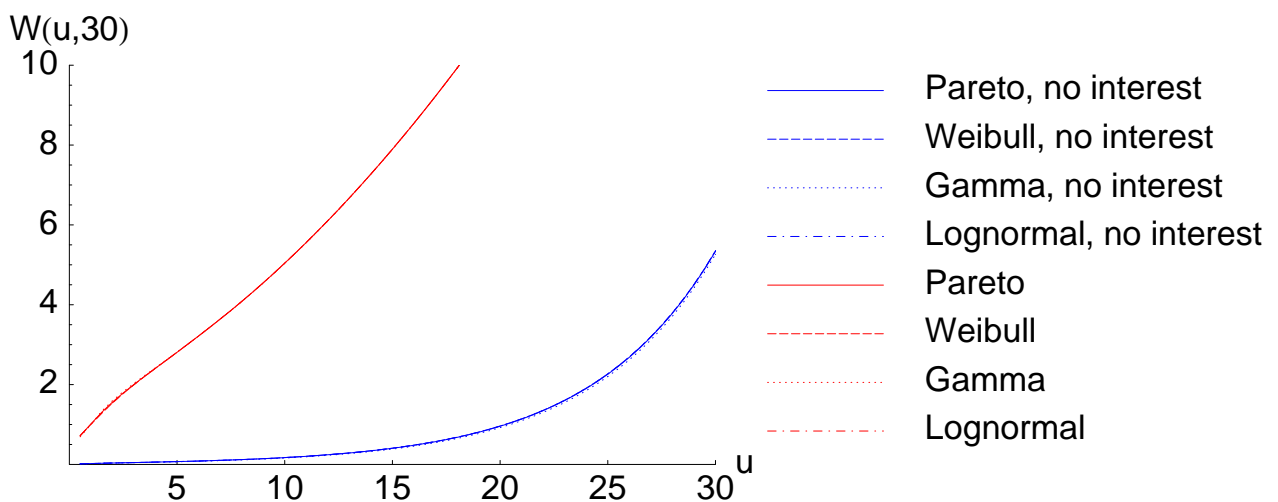
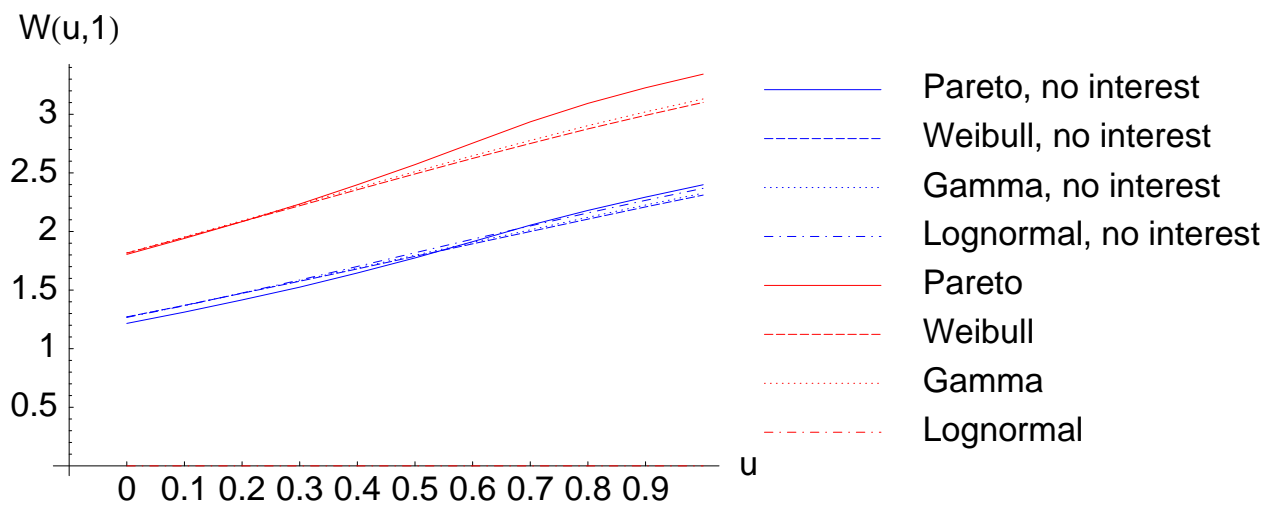


Abbildung: Log-log Plot der Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(u, 30)$  in Modell A



Abbildungen:  $W(u, 1)$  bzw.  $W(u, 30)$  in Modell A

# Fehleranalyse

MSE (mean square error) der Rechnungen

$$S = \sqrt{\frac{1}{|P|} \sum_{(u,b) \in P} \left( g(u,b) - \tilde{g}(u,b) \right)^2}$$

$P$  ... Dreiecksgitter ( $b = 0..[0.1]..1, u = 0..[0.1]..b$ )

$g(u,b)$  ... "exakte" Werte (MC Schätzer mit  $N = 10^7$ )

$\tilde{g}(u,b)$  ... approximierte Werte

## Regressionsanalyse:

$$\log_2(S) = a_0 + a_1 \log_2(N) + a_2 \log_2(\log_2(N)) + \epsilon$$

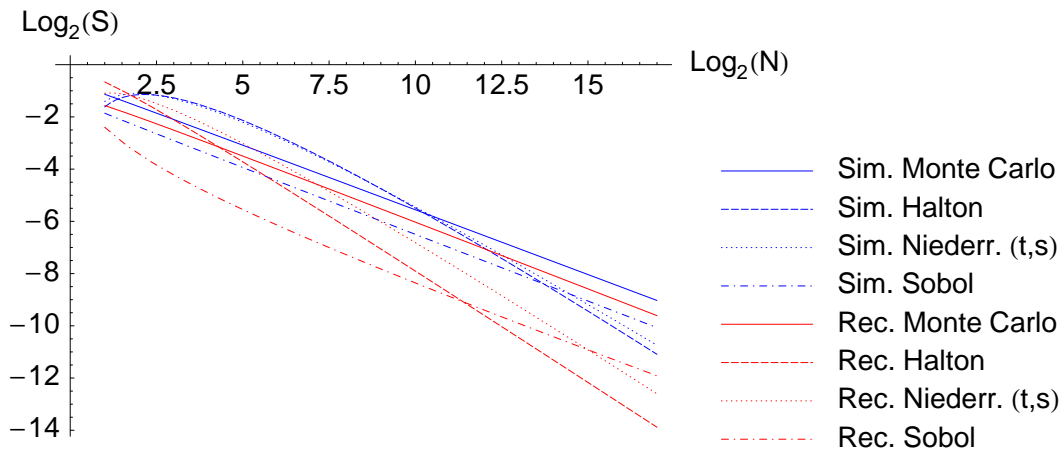


Abbildung: MSE von  $\phi(u,b)$  (Pareto Verteilung, Modell B)

- hybride Monte Carlo Techniken (50 QMC Dimensionen, Rest MC)
- $N = 66000$  (bzw. 33000)

## Fehleranalyse II

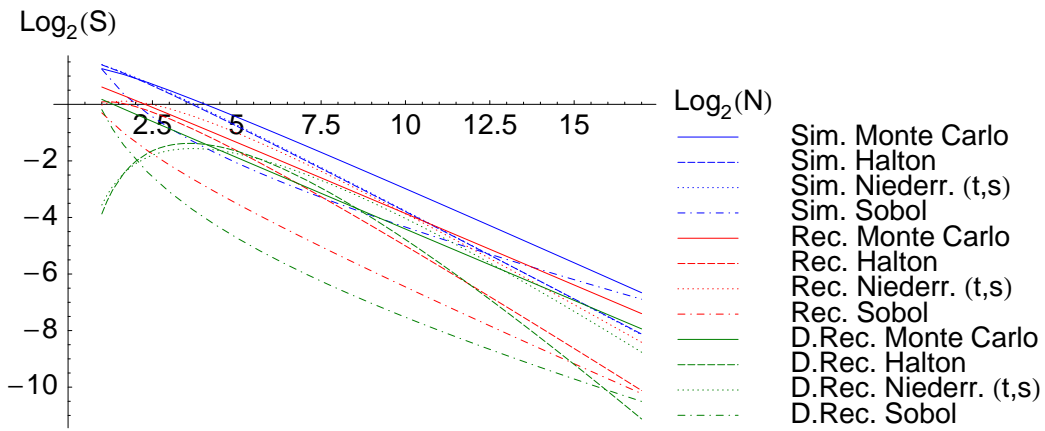
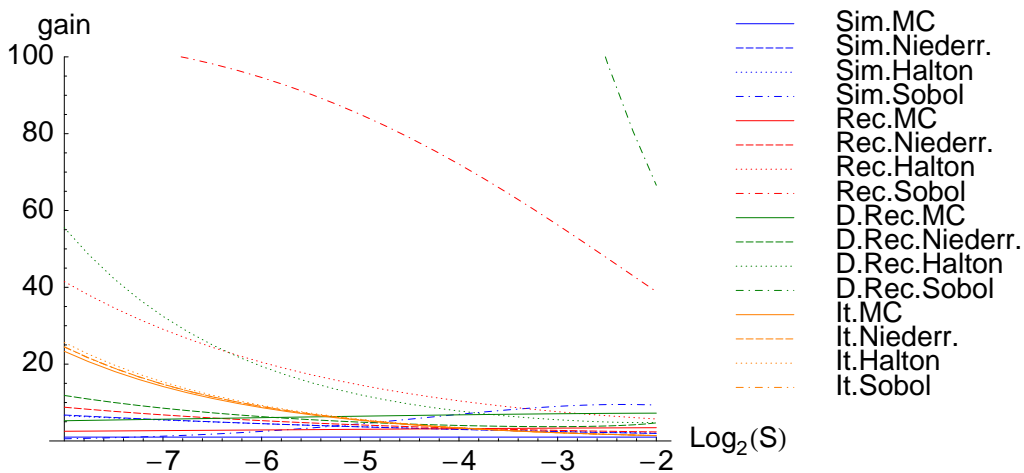


Abbildung: MSE von  $W(u, b)$  (Weibull Verteilung, Modell A)

$$\text{Effizienzsteigerung}_i = \frac{N_{\text{MC}}^*(S)}{N_i^*(S)}$$

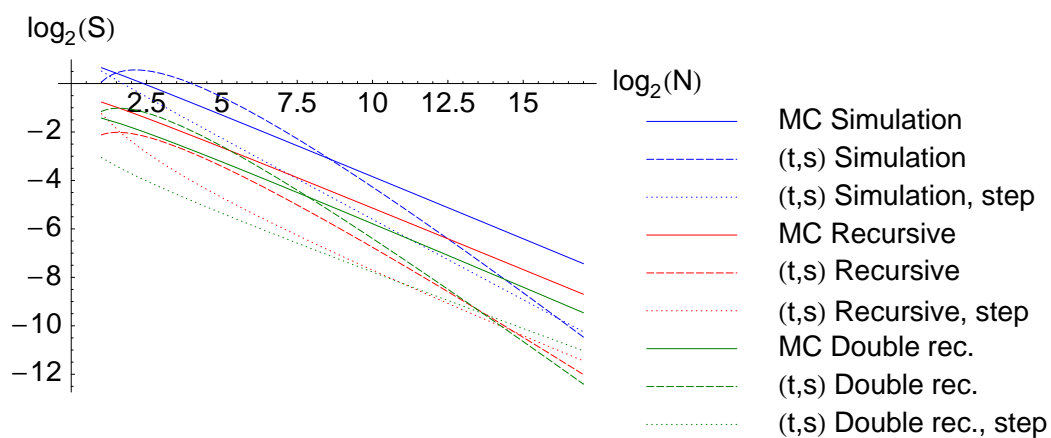


Effizienzsteigerung der Berechnung von  $W(u, b)$

(Modell A, Weibull Verteilung)

# Probleme bei QMC: “Leading zeros” Phänomen

Viele Folgen kleiner Diskrepanz besitzen am Beginn zu viele Punkte nahe bei 0  $\Rightarrow$  Beginn nicht mit erstem Element der Folge, sondern mit dem  $b^j$ -ten (egal, da Netzeigenschaft)



MSE für Modell B, Gamma Verteilung

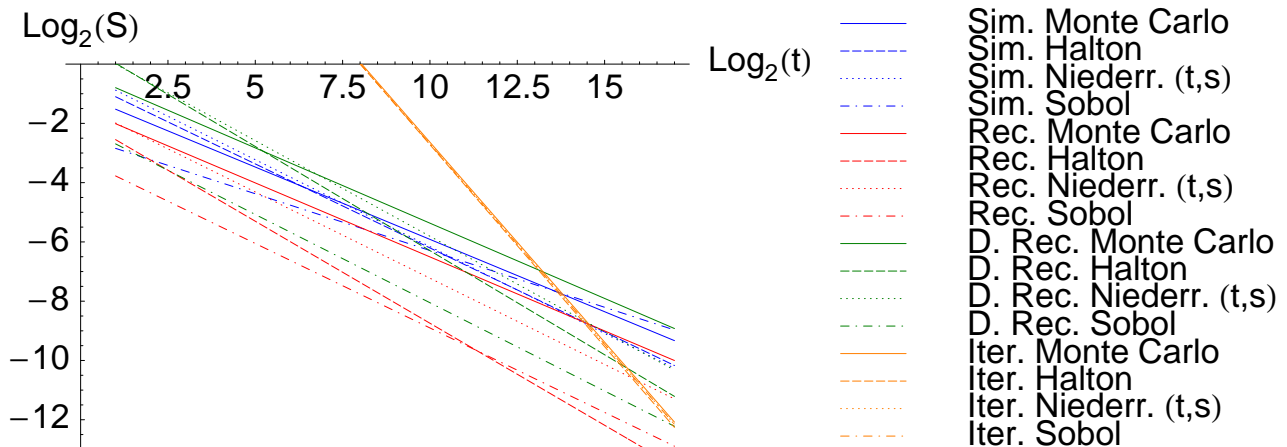
## Vorteile von QMC:

- Starke Effizienzsteigerung gegenüber MC
- Reproduzierbarkeit
- Deterministische Fehlerschranken

## Nachteile von QMC:

- besonders in hohen Dimensionen: gute Verteilungseigenschaften erst bei großen  $N$
- Diskrepanz-Ordnung gilt nur asymptotisch

## MSE von $W(u, b)$ gegen Rechenzeit



(Modell A, Pareto Verteilung)

## Qualitative Ergebnisse (Zusammenfassung)

- Rekursive Methoden klar besser als direkte Simulation
- Geeignete QMC Folgen: Halton, Sobol
- in Modell B: Sobol, Niederreiter  $(t, s)$ -Folgen
- Iterative Methode attraktiv für kleine  $S$  bzw. wenn gesamter Bereich von Interesse